

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

12. Band, Heft 3

UND IHRE GRENZGEBIETE

S. 97—144

Geschichtliches.

● **Neugebauer, O.: Mathematische Keilschrift-Texte. Tl. 1 u. 2. (Quellen und Studien z. Geschichte d. Math., Astron. u. Physik. Hrsg. v. O. Neugebauer, J. Stenzel u. O. Toeplitz. Abt. A: Quellen. Bd. 3.)** Berlin: Julius Springer 1935. Tl. 1: XII, 516 S. u. 85 Fig. RM. 74.—, Tl. 2: IV, 65 S., 10 Fig. u. 69 Taf. RM. 54.—.

Es handelt sich hier um eine Sammlung aller bisher zugänglichen Texte, davon der größte Teil bisher unpubliziert (vieles davon auch in den „Vorlesungen“ des Verf. [dies. Zbl. 10, 97] noch unberücksichtigt). Die Hauptmasse dieser Texte gehört dem Zeitintervall von etwa 2000 v. Chr. bis gegen 1200 v. Chr. an, einzelne stammen aber noch aus hellenistischer Zeit, sind also ungefähr gleichzeitig mit Archimedes. Wir verfügen hier somit über Originaltexte aus fast 2 Jahrtausenden, deren Gesamtumfang weit größer ist als alles, was wir sonst von der antiken Mathematik vor Euklid besitzen. — Teil I dieser Edition enthält 7 Kapitel. Kap. I gibt eine systematische Zusammenstellung aller „Tabellentexte“: Reziprokentabellen, Multiplikationstabellen, Quadrate und Kuben und schließlich allgemeinere Tabellentypen (z. B. a^n). Dieses Material stammt u. a. aus den Sammlungen von Berlin, Brüssel, Istanbul, Jena, London, New Haven, Paris und Philadelphia. Alle übrigen Kapitel betreffen „eigentlich mathematische Texte“, die der Reihe nach sowohl in Transkription wie Übersetzung samt Kommentar vorgelegt werden, während der Tafelband (Teil II) die Photographien und Autographien enthält. Kap. II, Texte des Louvre (z. B. ein zu den ältesten Texten gehöriges Prisma sowie eine Tafel aus seleukidischer Zeit, beide u. a. die vollständige Auflösung quadratischer Gleichungen enthaltend). Kap. III, Texte des British Museum. Ein ebenfalls der ältesten Periode angehöriger Text betrifft Flächeninhalte symmetrischer Figuren, eine andere Gruppe umfaßt auch die schon länger bekannten Texte aus „Cuneiform Texts IX“, ergänzt durch den u. a. kubische Gleichungen behandelnden Text (dies. Zbl. 7, 386). Kap. V und VI (Texte aus Straßburg und Berlin) betreffen zahlreiche Texte verschiedensten Themas: Lineare Gleichungen für mehrere Unbekannte, quadratische Gleichungen (sowohl in oft sehr komplizierter geometrischer Einkleidung wie rein algebraisch, auch inhomogene Fassung), Näherungsformeln usw. Kap. VII, Yale Babylonian Collection. Eine ganz neue Klasse von Texten, in Serien geordnet und nur Aufgaben enthaltend, fast alle rein algebraischen Charakters (Gleichungen 1. bis 3. Grades und quadratisch lösbare vom 4. und 6. Grad, allgemeines „Verhältnis von a bezüglich b “, „negative“ Zahlen usw.). Es handelt sich hier um ein systematisch geordnetes Lehrbuch mit weit über 1000 Beispielen. Teil II enthält Register und Literaturnachweise, ferner ein umfangreiches Wörterverzeichnis, das die ganze Terminologie dieser Texte zu überblicken gestattet, schließlich Nachträge zu den Kap. II (z. B. Zinseszinsrechnung), III und VII sowie die Tafeln.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Bortolotti, Ettore: Le irrazionalità quadratiche nella matematica babilonese. Period. Mat., IV. s. 15, 220—229 (1935).

Verf. bezweifelt die Deutung angenäherter Quadratwurzelberechnungen (Rechtecksdiagonale), die Ref. z. B. in seinen Vorlesungen über vorgriechische Mathematik (dies. Zbl. 10, 97) gegeben hat. Sein Hauptargument ist, daß die babyl. Math. zu dieser Zeit nicht einmal über die gewöhnliche Bruchrechnung verfügt hätte.

O. Neugebauer (Kopenhagen).

Jörg, Edgar: Des Boetius und des Alfredus Magnus Kommentar zu den „Elementen“ des Euklid. [Nach dem Codex (Z. L. 332) B. der Bibliotheca Nazionale di S. Marco zu Venedig.] Buch 2. Heidelberg: Diss. 1935. 34 S.

Lundmark, Knut: Aristotle as practical astronomer. (Lunds astron. Observ. Ser. II. Nr. 72. Historical notes and papers. Nr. 1.) Lunds Univ. Årsskr., N. F. 30, Nr 10, 1—8 (1935).

Zimmermann, Karl: Arbogast als Mathematiker und Historiker der Mathematik. Heidelberg: Diss. 1934. 58 S.

Emeh, Arnold F.: The Logica demonstrativa of Girolamo Saccheri. III. Scripta Math. 3, 221—233 (1935).

II. s. dies. Zbl. 11, 193.

Fedel, Ernst Jakob: Der Briefwechsel Johann Bernoulli — Pierre Varignon aus den Jahren 1692 bis 1702 in erläuternder Darstellung. Heidelberg: Diss. 1933. 42 S.

Keresztesi, Maria: Die Geschichte der ungarischen Fachsprache in der Mathematik. Mitt. math. Semin. Univ. Debrecen H. 11, 1—194 u. dtsh. Zusammenfassung 195 bis 197 (1935) [Ungarisch].

Hayashi, Tsuruichi: On the mathematicians in the Hokuroku-Dô districts. Tôhoku Math. J. 41, 249—264 (1935) [Japanisch].

Algebra und Zahlentheorie.

Arsehon, S.: Verallgemeinerte Sarrussche Regel. Rec. math. Moscou 42, Nr 1, 121 bis 127 u. dtsh. Zusammenfassung 128 (1935) [Russisch].

Given a determinant of order n , form a matrix by writing at the end of each row its first $n - 1$ elements in their given order. The products of the elements on any diagonal we call element of the matrix, and we take it with the \pm sign, following the same rule as for determinants. If we now rearrange the rows of this matrix in all possible ways, we obtain a family of $n!$ matrices. — The object of this paper is: (I) to show there exist $\frac{(n-1)!}{2}$ matrices among the elements of which we find all $n!$ elements of the original determinant; (II) to derive a "simple" algorithm for obtaining the above matrices (i. e. for rearranging the rows of the original matrix), that is an algorithm which a) gives the $\frac{(n-1)!}{2}$ necessary matrices only, b) does not depend on n , c) derives each matrix from the preceding one by interchanging two adjacent rows, and d) yields a plain general rule of signs for the elements of the matrices. Such an algorithm should lead to a mechanical computation of determinants.

J. Shohat (Philadelphia).

Kroukowski, B. V.: Sur quelques relations entre le déterminant donné et les déterminants composés d'après les éléments du donné. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 3/4, 207—212 u. franz. Zusammenfassung 212—213 (1935) [Ukrainisch].

Resultate einfacher Transformationen. — S. 207, Z. 7 v. u. muß links m statt n stehen, so daß S. 209, Z. 12 wegfällt. S. 209, Z. 11 v. u. lies $k = 1$. *Th. Motzkin*.

McCoy, Neal H.: On the rational canonical form of a function of a matrix. Amer. J. Math. 57, 491—502 (1935).

If A is a matrix of order n with elements in a field K , its invariant factors $E_i(\lambda)$ are products of powers of irreducible polynomials, these powers being the elementary divisors. Let A have the single elementary divisor $[p(\lambda)]^r$ where $p(\lambda)$ is of degree s , and let φ be any polynomial. Define $f(x)$ as the unique polynomial of minimum degree t , leading coefficient 1, such that $p(\lambda) \mid f(\varphi(\lambda))$. Then $s = tm$. Let q indicate the highest power of $p(\lambda)$ which divides $f(\varphi(\lambda))$. Set $i = r$ or $i = q$ according as $q \geq r$ or $q < r$. Define k and l by the relations $r = (k-1)i + l$, $k \geq 1$, $1 \leq l \leq i$. Then the matrix $\varphi(A)$ has as elementary divisors $[f(\lambda)]^k$ taken lm times, and $[f(\lambda)]^{k-1}$ taken $m(i-l)$ times. Application is made to the matrix equation $\varphi(X) = B$. *MacDuffee* (Madison).

Ingraham, M. H., and K. W. Wegner: The equivalence of pairs of Hermitian matrices. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 145—162 (1935).

Part I (Ingraham). Two pairs of $n \times n$ Hermitian matrices A, B and C, D with complex elements are equivalent if there exists a non-singular matrix T such that $T'AT = C$, $T'BT = D$ where T' is the conjugate-transpose of T . It may be assumed that the rank of $\rho A + \sigma B$ never exceeds the rank r of B . A canonical form is found consisting of blocks which are all zero except for unit matrices multiplied by ρ or σ of orders l_1, \dots, l_{k-1} and one non-singular block $\rho A^{(k)} + \sigma B^{(k)}$. The integers l_1, \dots, l_{k-1} are called the invariant sub-ranks. Thus two pairs A, B and C, D are equivalent if and only if B is equivalent to D , the invariant sub-ranks are equal, and the pairs $A^{(k)}, B^{(k)}$ and $C^{(k)}, D^{(k)}$ are equivalent. — **Part II (Wegner).** Two pairs A, B and C, D with $|B| \neq 0$, $|D| \neq 0$ are equivalent if and only if they have the same elementary divisors and the matrices $B(B^{-1}A - \lambda I)^n$ and $D(D^{-1}C - \lambda I)^n$ have the same index for every real λ and every positive integer n . This last condition can be replaced by the equality of certain integral invariants $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ for the two pairs. The results agree with those of Trott [Amer. J. Math. 56, 359—371 (1934); this Zbl. 9, 242] and were obtained contemporaneously.

MacDuffee (Madison).

Petterson, E. L.: Eine Bedingung für die irreduziblen Faktoren von gewissen Polynomen modulo eines Primzahlprodukts. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 45, 169—172 (1935).

Ist ein Polynom $f(x)$ folgendermaßen darstellbar: $f(x) = a + \sum_{\lambda=1}^N A_\lambda (g_\lambda(x)^{p^{t_\lambda}} - g_\lambda(x))$, wobei a, A_λ, t_λ ganz rational und $t_\lambda \geq 0$ sind, p eine Primzahl und $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ ist, so ist der Grad jedes modulo p irreduziblen Faktors von $f(x)$ durch p teilbar. Der Verf. beweist das, indem er die Spur von $f(\varrho)$ berechnet, wobei ϱ eine als Galoissche Imaginäre aufgefaßte Wurzel eines modulo p irreduziblen Faktors von $f(x)$ ist. — Sodann definiert der Verf. das Polynom $S(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ mit Hilfe der rekurrenten Formeln: $S(x) = x$,

$$S(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = S(x^{\alpha_k}; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}) - S(x; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1})$$

und beweist, daß $S(x; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_m \pm ((x^m)^{\alpha_k} - x^m)$, wobei k beliebig aus $< l, n >$ genommen wird und m verschiedene Produkte einiger der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ durchläuft. — Daraus folgt, daß $f(x) = a + \sum_{\lambda=1}^N A_\lambda (g_\lambda(x); p_1^{t_{\lambda_1}}, \dots, p_n^{t_{\lambda_n}})$ nur diejenigen modulo $p_1 p_2 \dots p_n$ irreduziblen Faktoren enthält, deren Grade durch $p_1 p_2 \dots p_n$ teilbar sind. — Aus dem letzten Satz ergibt sich, daß $S(x; p_1, p_2, \dots, p_n) = a$ modulo $p_1 p_2 \dots p_n$ irreduzibel ist, falls $p_i \nmid p_j$ ($i \neq j$) ist. — Insbesondere ist $x^p - x + a$ irreduzibel.

N. Tschebotarow (Kasan).

MacLane, Saunders: Abstract absolute values which give new irreducibility criteria. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 21, 472—474 (1935).

Um die Tragweite der auf das Prinzip des Newtonschen Polygons gegründeten Irreduzibilitätskriterien zu erweitern, legt der Verf. eine Verallgemeinerung des Begriffes „Exponent“ vor. Unter dem Exponent („absolute value“) der Ringelemente a versteht er die den Bedingungen

$$V(a+b) \geq \min(Va, Vb), \quad Vab = Va + Vb$$

genügende reelle Funktion Va . Gilt $V(a-b) > Va = Vb$, so sagt er, a und b seien äquivalent ($a \sim b$). Gibt es im Ring ein c , so daß $a \sim bc$, so wird a durch b äquivalent-teilbar genannt. — Ist die Definition des Exponenten V innerhalb eines Körpers K schon eingeführt, so definiert der Verf. den Exponenten V_0 für den erweiterten Körper $K[x]$, indem er $V_0 x = \mu$ und $V_0(a^n x^n + \dots + a_0) = \min(Va_n + n\mu, \dots, Va_0)$ setzt, wobei μ eine (willkürliche?) Konstante bedeutet. — Sodann definiert der Verf. weitere Exponentenfunktionen, indem er den „Stammpolynomen“ (key polynomials)

$\varphi(x)$ einen neuen höheren Exponentenwert als $V_0\varphi(x)$ zuschreibt und der dadurch entstehenden Funktion V' noch gewisse Bedingungen auferlegt. — Verf. spricht die Behauptung aus, daß die dadurch entstehenden Exponentenfunktionen, auch die Grenzfunktionen mitgenommen, alle möglichen den obenerwähnten Bedingungen genügenden Exponentenfunktionen erschöpfen. — Die mittels dieser Exponentenwerte gebildeten Newtonschen Polygone erlauben, neue Irreduzibilitätskriterien aufzustellen. — Es wäre prinzipiell wichtig, zu erkennen, inwieweit diese neue Definition der Exponentenfunktion auch neue erzeugende Permutationen der Monodromiegruppe von $f(x)$ erscheinen läßt. Das ist dem Ref. wegen der knappen Fassung der vorliegenden Note nicht gelungen darzutun. N. Tschebotarow (Kasan).

Wegner, Udo: Über das Verhalten der Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung hinsichtlich ihrer Gruppe. J. reine angew. Math. **173**, 185—190 (1935).

Verf. gibt einen neuen Beweis und verallgemeinert folgenden von A. Speiser [Trans. Amer. Math. Soc. **23**, 173—178 (1922)] stammenden Satz: Ist P die Periode der Folge s_0, s_1, s_2, \dots von Potenzsummen der Wurzeln einer ganzzahligen Gleichung $f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ modulo p , wobei die Primzahl $p > n$ ist und nicht in $f(0)$ aufgeht, so ist der kleinste Exponent m , für den $p^m \equiv 1 \pmod{P}$ gilt, gleich dem k. g. V. der Grade der modulo p irreduziblen Faktoren von $f(x)$. — Der Beweis wird mit Hilfe der Identität $(x^p - 1) f'(x) \equiv 0 \pmod{p, f(x)}$ hergeleitet und umfaßt auch den Fall der kritischen Primzahlen p , falls sie regulär sind. — Ist γ eine Wurzel von $f(x) = 0$, so gilt $\gamma^{p^v} \equiv 1 \pmod{p}$ (für $p > n$). Ist p dabei nicht kritisch, so gilt auch $\gamma^p \equiv 1 \pmod{p}$. — Ist P_β die Periode der Folge s_0, s_1, s_2, \dots modulo p^β , so gilt $P_\beta = p^\varepsilon \cdot P$, wobei $\varepsilon \leq \beta$ ist. N. Tschebotarow (Kasan).

Schulz, Werner: Bemerkungen zu einer Abhandlung von Herrn Takahashi. Jber. Deutsch. Math.-Verein. **45**, 172—180 (1935).

Sind die Koeffizienten des Polynoms $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ reell und genügen sie den Bedingungen

$$a_v + a_{v+1} - 2 a_{v+2} \geq 0 \quad (v = -1, 0, 1, \dots, n; a_{-1} = a_{n+1} = a_{n+2} = 0),$$

so sind die Nullstellen von $f(x)$ nach Takahashi (dies. Zbl. **8**, 193) absolut genommen ≤ 1 . Verf. beweist, daß ein den vorigen Bedingungen genügendes Polynom $f(x)$ auf dem Einheitskreise keine mehrfache Nullstelle besitzt und dort höchstens für eine solche $n + 2$ -te Einheitswurzel verschwinden kann, deren Ordnung ein ungerader Teiler > 1 von $n + 2$ ist. — Außerdem zeigt Verf., daß die Bedingungen der übrigen vier Sätze von Takahashi [Bedingungen (2), (3), (4) und (5) in dies. Zbl. **8**, 193] teils überhaupt niemals, teils nur für gewisse Werte von n erfüllt werden können. (In den letzten Fällen läßt sich das Polynom in ein anderes Polynom überführen, für welches auch die bekannten Bedingungen des Eneström-Kakeyaschen Satzes bestehen.) Sz. Nagy (Szeged).

Gurevič, G. B.: Classification des trivecteurs ayant le rang huit. C. R. Acad. Sci. URSS **2**, 353—356 u. franz. Text 355—356 (1935) [Russisch].

In einer vorigen Arbeit hat Verf. für die Klassifikation der Trivektoren vom Range $r = 7$ drei arithmetische Invarianten $(r, \varrho_1, \varrho_2)$ angegeben (vgl. für die Definition von ϱ_1 und ϱ_2 das Referat über diese Arbeit; dies. Zbl. **10**, 53). Im Falle $r = 8$ ist für die Klassifikation die Angabe dieser drei Invarianten nicht hinreichend. Bildet man aus dem Trivektor w_{ijk} die Affinoren

$$w_i[jk w_{lmn} w_{abc} w_{xyz}]; \quad w_i[jk w_{lmn} w_{abc} w_{pqr} w_{xyz}]; \quad w_i[jk w_{lmn} w_{abc} w_{pqr} w_{efg}] w_{xyz},$$

und werden alle Indizes, ausgenommen der Index i , abgedrosselt, so bekommt man drei Systeme von Vektoren. Die Anzahlen der in diesen Systemen auftretenden linear unabhängigen Vektoren werden mit σ_1, σ_2 und σ_3 angedeutet. Die sechs arithmetischen Invarianten $(r, \varrho_1, \varrho_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ genügen für die Durchführung der Klassifikation. Die Invarianten haben einige sehr merkwürdige Eigenschaften, z. B.: die Summe $r + \varrho_1 + \varrho_2 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ist für jeden Typus ein Vielfaches von Drei.

J. Haantjes (Delft).

Spies, Heinz: Die Darstellung der inhomogenen Modulargruppe mod q^n durch die ganzen Modulformen gerader Dimension. *Math. Ann.* **111**, 329—354 (1935).

Für eine beliebige natürliche Zahl m bilden die ganzen Modulformen m -ter Stufe einer festen Dimension $-2k$ eine lineare Schar von endlichem Range $N(m)$. Wählt man unter ihnen $N(m)$ linear unabhängige aus und übt auf ihre Argumente eine Modulsstitution A aus, so werden die transformierten Formen lineare homogene Funktionen der ursprünglichen. Auf diese Weise wird der Modulsstitution A eine lineare homogene Transformation vom Grade N zugeordnet. Die Gesamtheit dieser linearen Substitutionen bildet dann eine Darstellung $\mathfrak{S}_{2k}(m)$ der zu m gehörigen Modulargruppe $\mathfrak{M}(m)$. Verf. betrachtet insbesondere den Fall $m = q^n$, $q > 3$ Primzahl, n natürl. Zahl. Für $n \geq 3$ sind zur Zeit die einfachen Charaktere der Gruppe $\mathfrak{M}(q^n)$ noch unbekannt. Verf. gelingt es, ohne Kenntnis dieser einfachen Charaktere den Charakter der Darstellung $\mathfrak{S}_{2k}(q^n)$ auf folgendem Wege zu bestimmen: „Der Charakter ist eine Funktion der Klassen konjugierter Elemente und sein Wert für ein Element die Summe der charakteristischen Wurzeln der entsprechenden Darstellungsmatrix. Es genügt daher zur Berechnung, aus jeder Klasse konjugierter Elemente einen Vertreter A der Ordnung g herauszugreifen und für jede g -te Einheitswurzel ω die Vielfachheit zu bestimmen, mit der sie unter den charakteristischen Wurzeln der Darstellungsmatrix, die ja g -te Einheitswurzeln sind, vorkommt. Diese Vielfachheit ist nun identisch mit der Anzahl linear unabhängiger ganzer Modulformen, die bei Anwendung von A den Faktor ω aufnehmen. Existiert überhaupt eine solche Form, so liefert der Riemann-Rochsche Satz die genaue Anzahl; die Existenzfrage muß in jedem Fall geklärt werden.“ Sobald die einfachen Charaktere von $\mathfrak{M}(q^n)$ bekannt sind, wird die Zerlegung der Darstellung $\mathfrak{S}_{2k}(q^n)$ in ihre irreduzibeln Bestandteile auf Grund der Ergebnisse des Verf. möglich. Für $n = 2$ sind neuerdings die einfachen Charaktere von $\mathfrak{M}(q^n)$ bestimmt worden [Rohrbach, *Schr. math. Semin. Univ. Berlin* **1**, H. 2 (1932) und Praetorius, *Abh. math. Semin. Hamburg. Univ.* **9**, 365 bis 394 (1933); vgl. dies. Zbl. **5**, 342 u. **7**, 52], hier führt Verf. die Zerlegung von $\mathfrak{S}_{2k}(q^2)$ durch. Im allgemeinen Fall findet er die Sätze: „Die Werte des Charakters von \mathfrak{S}_{2k} sind im allgemeinen rationale Zahlen. Nur im Fall $q \equiv 3(4)$ ergeben sich für die Charaktere der parabolischen Substitutionen, also für die Konjugierten von $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und ihre Potenzen, Zahlen des Körpers $K(\sqrt{-q})$, in deren Imaginärteil als Faktor von $\sqrt{-q}$ ein Vielfaches der Klassenzahl von $K(\sqrt{-q})$ auftritt“, ferner „Irreduzible Darstellungen treten in \mathfrak{S}_{2k} gleich oft auf, wenn ihre Charaktere konjugiert sind in bezug auf $K(\sqrt{-q})$ “ und „Die Differenz der Multiplizitäten, mit denen zwei irreduzible Darstellungen mit konjugiert komplexen Charakteren in \mathfrak{S}_{2k} vorkommen, ist ein ganzzahliges Vielfaches der Klassenzahl von $K(\sqrt{-q})$.“

Bessel-Hagen (Bonn).

Morin, Ugo: *Ricerche sull'algebra bicomplessa*. *Mem. Accad. Ital.* **6**, 1241—1265 (1935).

Si studiano le proprietà dell'algebra bicomplessa di C. Segre, trattando anche questioni di carattere funzionale ed il gruppo degli automorfismi dell'algebra. *Autoreferat.*

Spampinato, N.: *Sulle funzioni totalmente derivabili in un'algebra reale o complessa dotata di modulo*. *I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **21**, 621—625 (1935).

Let A be a real or complex algebra having a principal unit, with basis u_1, \dots, u_n . A function $y = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$ is called totally derivable on the left (right) at a point $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$ of its region C of definition if the functions y_1, \dots, y_n have derivatives at x with respect to each x_i , and if there exists a function $z(x)$ such that $dy = dx z(x)$ ($dy = z(x) dx$) when $dx = \sum dx_i u_i$ is arbitrary. A necessary and sufficient condition that y be totally derivable on the right (left) at x is that the functions $y_i(x_m)$ have derivatives at x with respect to each x_i , and that there exist in A a function $z(x)$ having at x for the transpose of its left (right) matrix the jacobian matrix of the functions $y_i(x_m)$. When A is the complex field, this reduces to the Cauchy-Riemann

conditions for analyticity. It also generalizes a result of Scorza Dragoni [Mem. Accad. d'Italia 5, 608 (1934); this Zbl. 9, 362] for bicomplex numbers. *MacDuffee*.

Spampinato, N.: Una proprietà caratteristica delle funzioni totalmente derivabili. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 626—631 (1935).

This note shows the identity of the left (right) total derivative $z(x)$ of the preceding article with the unique characteristic left (right) derivative previously studied by the author [Rend. Circ. mat. Palermo 58, 105—143 (1934); this Zbl. 9, 119].

MacDuffee (Columbus).

Scorza, G.: A proposito di un recente lavoro di A. A. Albert. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 727—732 (1935).

Es wird gezeigt, daß der von A. A. Albert [Ann. of Math., II. s. 36, 151 (1935); dies. Zbl. 11, 6] gegebene Beweis des Poincaréschen Satzes über halbreduzible Riemannsche Matrizes im Grunde eine algebraische Fassung einer vom Verf. 1919 (Rend. Circ. mat. Palermo 43, 213—238) angegebenen geometrischen Schlußweise ist. Es wird bemerkt, daß der von Rosati und Scorza 1914 gegebene geometrische Beweis desselben Satzes begrifflich einfacher ist. Außerdem werden einige Prioritätsfragen diskutiert.

van der Waerden (Leipzig).

Scorza, Gaetano: Sulle algebre pseudonulle di ordine massimo. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 14, 1—14 (1935).

L'A. a récemment prouvé qu'une algèbre P pseudonulle d'indice r , commutative ou non, ayant l'écart δ (différence entre les ordres de P et de P^2), a l'ordre au plus resp. égal à $\binom{\delta+r-1}{\delta} - 1$ ou à $\frac{\delta+r-1}{\delta-1} - 1$ [cfr. G. Scorza, Rend. R. Acc. Lincei, VI. s. 20, 143 (1934); ce Zbl. 10, 195]. Il étudie ici les algèbres pseudonulles, commutatives ou non, pour lesquelles l'ordre a resp. la valeur maxima susdite [dont il avait déjà établi l'existence (l. c.)], et démontre que: Les algèbres pseudonulles d'ordre maximum et indice > 2 sont toutes irréductibles. — Si u est un automodule d'une algèbre A , ayant une algèbre P pseudonulle d'ordre maximum et indice > 2 comme sous-algèbre invariante, les éléments de P admettent tous en u un nullifique on ils admettent tous u comme module. — Enfin, si A est une algèbre ayant une sous-algèbre exceptionnelle E , qui soit pseudonulle d'ordre maximum et indice > 2 , on doit distinguer deux cas: 1. A n'a pas de module; si A ne coïncide pas avec E , elle est alors la somme directe de E avec une algèbre semi-simple. 2. A est douée de module; elle est alors à module primitif, ou bien est la somme directe d'une algèbre de ce type avec une algèbre semi-simple.

Beniamino Segre (Bologna).

Grave, D. O.: Arithmetische Theorie der algebraischen Größen. Begriff vom Ideal. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 3/4, 25—44 u. deutsch. Zusammenfassung 44 (1935) [Ukrainisch].

Eine elementare Entwicklung der Idealtheorie mit Hilfe der Kronecker-Weberschen Funktionale. Nach einer knappen historischen Einleitung erklärt der Verf. folgende Begriffe: algebraischer Zahlkörper, ganze algebraische Zahl, Einheit, transzendente Körpererweiterung, Funktional, lexikographische Transformation, die Sätze von Gauß, ganzes Funktional, funktionale Einheit, größter gemeinsamer Teiler, Zusammenhang mit den Dedekindschen Idealen. — Die Darlegung ist mit vielen Beispielen und praktischen Erläuterungen versehen.

N. Tschebotarow (Kasan).

Berg, Erik: Über die Existenz eines Euklidischen Algorithmus in quadratischen Zahlkörpern. Fysiogr. Sällsk. Lund Föhr. 5, 1—6 (1935).

Die Frage nach der Existenz eines Euklidischen Algorithmus in reell-quadratischen Zahlkörpern wurde bis jetzt nur für einzelne Fälle erledigt (vgl. z. B. O. Perron, dies. Zbl. 5, 387; R. Remak, dies. Zbl. 10, 247). — Nun ist es dem Verf. gelungen, diese Frage allgemein für alle reell-quadratischen Körper $K(\sqrt{D})$ zu erledigen, falls D von der Form $4k+2$ oder $4k+3$ ist. — Da im Falle $D=8k+2$ die Klassenzahl

von $K(\sqrt{D})$ gerade ist, genügt es, nur die Fälle $D = 8k + 3$, $8k + 7$, $8k + 6$ zu betrachten. Für die zwei ersten Fälle wählt der Verf. ein ungerades p , so daß $5D < p^2 < 6D$ ist (was stets bei $D > 100$ möglich ist), und beweist, daß man die Ungleichung $\left| x^2 - D \left(y - \frac{p}{D} \right)^2 \right| < 1$ nicht durch ganze x, y befriedigen kann. Denn dann muß entweder $Dx^2 - (Dy - p)^2 = -p^2 + 5D$ oder $Dx^2 - (Dy - p)^2 = -p^2 + 6D$ sein, was wegen der Kongruenzeigenschaften modulo 8 unmöglich ist. — Ist $D = 8k + 6$, so soll p die Ungleichungen $2D < p^2 < 3D$ befriedigen, was stets bei $D > 50$ möglich ist. — Sodann betrachtet der Verf. einzelne Fälle mit $D < 100$. *N. Tschebotarow.*

Lehmer, D. H.: On Lucas's test for the primality of Mersenne's numbers. *J. London Math. Soc.* **10**, 162—165 (1935).

Beweis des Satzes: Ist p eine Primzahl ($\neq 2$), so ist $N = 2^p - 1$ dann und nur dann eine Primzahl, wenn das $(n - 1)$ -te Glied der Reihe $S_1 = 4, \dots, S_k = S_{k-1}^2 - 1$ teilbar ist durch N . Ein Teil dieses Satzes ist von Lucas; sein Beweis war nicht einwandfrei. Verf. gebraucht die Reihe $U_r = (a^r - b^r) : (a - b)$, $V_r = a^r + b^r$, $a = 1 + \sqrt[3]{3}$, $b = 1 - \sqrt[3]{3}$, der Beweis ist dann sehr einfach. (Vgl. *Ann. of Math.* **31**, 419, wo Verf. einen anderen Beweis gibt.) *N. G. W. H. Beeger* (Amsterdam).

Analysis.

Silberstein, Ludwik: The roots of $\cos z = z$. *Philos. Mag.*, VII. s. **20**, 528—531 (1935).

Labocetta, L.: Sulla effettiva integrazione delle funzioni discontinue. IV. Funzioni periodicamente variabili. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **21**, 745—751 (1935).

Weiterführung der Aufsätze in derselben Zeitschrift **16**, 27—32, 95—101, 212—215 (dies. Zbl. **5**, 155, 248, 350). *L. Schrutka* (Wien).

Krafft, M.: Über konvexe Funktionen. *Math. Z.* **40**, 469—476 (1935).

Es sei $h(x) \geq 0$ für $0 \leq x \leq 1$ und dort Lebesgue-integrierbar; ferner sei $\int_0^1 h(x) dx > 0$. Dann erreicht das Integral $\int_0^1 h(x) \varphi(x) dx$, wo $\varphi(x)$ alle nach oben konvexen (im Sinne von Jensen konkaven) Funktionen mit $\int_0^1 \varphi^2(x) dx = 1$ durchläuft, sein Minimum für eine der Funktionen

$$\hat{\varphi}(x, 0) = \sqrt[3]{3}(1 - x), \quad \hat{\varphi}(x, t) = \begin{cases} \sqrt[3]{3} \frac{x}{t} & \text{für } x \leq t, \\ \sqrt[3]{3} \frac{1 - x}{1 - t} & \text{für } x \geq t, \end{cases} \quad \hat{\varphi}(x, 1) = \sqrt[3]{3}x$$

mit $0 < t < 1$. Ist speziell $h(x)$ monoton oder konkav, so wird das Minimum für $\varphi(x) = \hat{\varphi}(x, 0)$ oder $\hat{\varphi}(x, 1)$ erreicht. Für konkaves $h(x)$ rührt dieser Satz von Blaschke und Pick [*Math. Ann.* **77**, 277—300 (1916)] her. Verf. zieht die von Blaschke und Pick hergeleitete und angewendete Darstellung der konkaven Funktionen durch Stieltjesintegrale nicht explizit heran und gewinnt den obigen allgemeinen Satz auf kürzerem Wege. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

Smohorshewsky, A. S.: Über orthogonale Polynome. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr **3/4**, 171—186 u. deutsch. Zusammenfassung 185—186 (1935) [Ukrainisch].

Constatation de quelques propriétés formelles et élémentaires des polynomes $P_m(x)$ ($m \leq n$) définis par les conditions d'orthogonalité

$$\int_0^\infty P_i(x) P_k(x) d\psi_n(x) = 0, \quad \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases} \quad (i, k \leq n)$$

où la fonction $\psi_n(x)$, admettant les sauts

$$1^\circ C_n^m p^m q^{n-m} \text{ aux points } x = m \quad (p + q = 1; m = 0, 1, \dots, n),$$

$$2^\circ \frac{C_n^m C_{p-n}^{N-m}}{C_p^N} \text{ aux points } x = m \quad (n \leq p \leq N - n; m = 0, 1, \dots, n),$$

reste constante dans chacun des intervalles contigus (cf. M. Kravtchouk, C. R. Acad. Sci., Paris 189, 620; Bull. Acad. Sci. Ucr. 5). Aucune application n'est indiquée.

W. Gontcharoff (Moscou).

Krawtchouk, M.: Sur l'approximation d'une fonction de deux variables dans un domaine polygonal convexe par des polynômes, sous de certaines conditions sur le contour de ce domaine. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 3/4, 99—118 u. franz. Zusammenfassung 119 (1935) [Ukrainisch].

On sait bien qu'en se proposant d'obtenir une approximation d'une fonction continue d'une variable réelle on peut imposer aux polynômes d'approximation la condition supplémentaire de prendre dans certains points (en nombre fini) les mêmes valeurs qu'y prend la fonction donnée. Dans le domaine de deux variables réelles, on pourrait se proposer d'étendre la remarque précédente en exigeant que les polynômes d'approximation soient égaux à la fonction donnée (celle-ci ne pouvant d'ailleurs être arbitraire) sur certains arcs de courbes algébriques. C'est à cet ordre d'idées que se rapportent les résultats de M. Krawtchouk: il s'agit ici du cas d'un polygone formé de segments rectilignes sur lequel la fonction donnée se réduit à zéro.

W. Gontcharoff (Moscou).

Karamata, J.: Über eine Verteilung der Elemente komplexer Doppelfolgen. Bull. int. Acad. Yougoslave Sci. Beaux-Arts 28, 70—75 (1934).

Es sei $f(z)$ in $|z| < 1$ analytisch und auf $|z| = 1$ noch stetig. Für die komplexe Doppelfolge $a_{\nu,n}$, $1 \leq \nu \leq n$, werde $|a_{\nu,n}| \leq 1$ vorausgesetzt. Notwendig und hinreichend für die Existenz des Grenzwertes

$$A(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n f(a_{\nu,n})$$

erweist sich dann die Existenz aller Grenzwerte der $M_n^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n (a_{\nu,n})^k$, $k = 1, 2, \dots$, $n \rightarrow \infty$. — Wird für $|a| \leq 1$, $\theta(a, t) = \pi + t + 2 \arccos(e^{it} - a)$ gesetzt, so sind die obigen Bedingungen auch notwendig und hinreichend für die Existenz von

$$\theta(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n \{\theta(a_{\nu,n}, t) - \theta(a_{\nu,n}, 0)\},$$

abgesehen von höchstens abzählbar vielen t -Werten. Schließlich wird

$$A(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) d\{\theta(t)\}.$$

[Vgl. C. R. 182, 833—835 (1926); 183, 726—729 (1926).]

Rogosinski.

Salem, Raphaël: Généralisation de certains lemmes de van der Corput et applications aux séries trigonométriques. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 470—472 (1935).

The chief result of the paper is as follows. If $r(x)$ is a function which is sufficiently regular (more precisely, if $\log 1/r$ is concave, $1/r$ convex or concave) and such that $\sum r^2(n)$ converges (the latter series may converge arbitrarily slowly), then there is a sequence $\{f(n)\}$ such that $\sum_{n=1}^{\infty} r(n) e^{2\pi i f(n) + 2\pi i n x}$ converges uniformly, and so, in

particular, is the Fourier series of a continuous function. For similar results see also J. R. Wilton, J. London Math. Soc. 9, 194—201, 247—254 (1934) (this Zbl. 9, 310; 10, 110), and, in particular, the first footnote on p. 195. A. Zygmund (Wilno).

Misra, M. L.: A theorem on the convergence of the conjugate series of a Fourier series. J. London Math. Soc. 10, 213—216 (1935).

For the series conjugate to Fourier-Lebesgue series the author establishes the following result, which is an analogue of Lebesgue's well-known test. Let

$\psi(t) = f(x+t) - f(x-t)$; at every point x at which the integral $g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{1}{2} t dt$ exists, the series conjugate to the Fourier series of f converges, provided that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\delta} \left| \frac{\psi(t)}{t} - \frac{\psi(t+2\varepsilon)}{t+2\varepsilon} \right| dt = 0,$$

δ being a positive constant.

A. Zygmund (Wilno).

Differentialgleichungen:

Lampariello, G.: Sulla natura analitica delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 637—644 (1935).

En désignant par t la variable et par x l'inconnue, considérons l'équation:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t)$$

où les a sont des fonctions de même période et $f(t)$ une fonction presque per. — L'auteur énonce le résultat suivant: Si les exposants caractéristiques de l'équation sans second membre sont tous distincts et imaginaires (sauf, au plus, un égal à zéro), alors les solutions de l'équation avec second membre sont p. p. si elles sont bornées. — La démonstration nous semble incomplète; le Ref. a cependant établi un résultat analogue (Leçons sur les fonctions p. p. page 94).

J. Favard (Grenoble).

Smohorshewsky, A. S.: Sur le problème différentiel linéaire généralisé. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 3/4, 157—168 u. franz. Zusammenfassung 168—169 (1935) [Ukrainisch].

Construction de la fonction de Green $G(x, \xi)$ pour l'équation différentielle

$$p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = f(x)$$

avec les conditions aux limites

$$\sum_{j=0}^k [a_{0j}^{(m)} y(a_j) + a_{1j}^{(m)} y'(a_j) + \dots + a_{n-1,j}^{(m)} y^{(n-1)}(a_j)] = c_m$$

$$(m = 1, 2, \dots, n; a_0 < a_1 < \dots < a_k)$$

[voir Toyoda, Tôhoku Math. J. 38, 343—355 (1933); ce Zbl. 8, 157], ainsi que pour les conditions

$$\int_a^b [a_0^{(m)}(t) y(t) + a_1^{(m)}(t) y'(t) + \dots + a_{n-1}^{(m)}(t) y^{(n-1)}(t)] dt = c_m \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

Construction du tenseur de Green $G_{ij}(x, \xi)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) pour les conditions aux limites analogues, du système différentiel

$$p_i(x) y_i' + p_{i1} y_1 + \dots + p_{in} y_n = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

W. Stepanoff (Moskau).

Smohorshewsky, A. S.: Sur le tenseur de Green d'un système d'équations différentielles ordinaires. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 3/4, 187—192 u. franz. Zusammenfassung 192—193 (1935) [Ukrainisch].

Pour que le tenseur de Green $G_{ij}(x, \xi)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) du système

$$L_i[y] = p_i(x) y_i' + p_{i1}(x) y_1 + \dots + p_{in}(x) y_n = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

avec des conditions aux limites

$$A \begin{pmatrix} y_1(a) \\ y_2(a) \\ \dots \\ y_n(a) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} y_1(b) \\ y_2(b) \\ \dots \\ y_n(b) \end{pmatrix}$$

présente le caractère hermitien, $G_{ij}(x, \xi) \equiv \pm \bar{G}_{ji}(\xi, x)$, il faut et il suffit:

$$1. \quad L_i[y] \equiv M_i[y] = -(\bar{p}_i(x) y_i)' + \bar{p}_{i1}(x) y_1 + \dots + \bar{p}_{in}(x) y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

2. En désignant la matrice

$$P(x) = \begin{vmatrix} p_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2(x) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & p_n(x) \end{vmatrix}$$

on a: $AP^{-1}(x)A^* = BP^{-1}(x)B^*$.

W. Stepanoff (Moskau).

Mandelstam, L., N. Papalexi, A. Andronov, S. Chaikin et A. Witt: Exposé des recherches récentes sur les oscillations non linéaires. *Techn. Physics USSR* 2, 81 bis 134 (1935).

Dans la théorie moderne des oscillations l'intérêt se porte de plus en plus sur les systèmes non linéaires — c'est dans ces systèmes qu'il peut exister un régime oscillatoire d'amplitude et de période entièrement déterminées. Les recherches dont il s'agit dans l'article présent, sont distinguées par l'application des méthodes modernes de la théorie des équations différentielles. En représentant l'état d'un système à un degré de liberté sur le plan de phase, on applique avec succès à son étude la théorie qualitative de Poincaré — points singuliers et cycles limites [Andronov, C. R. Acad. Sci., Paris 189, 559 (1929)]. Le procédé qualitatif approché, dû à B. van der Pol, qui consiste à substituer au système donné un système où le temps ne figure pas explicitement — trouve sa base mathématique dans un article de Fatou [Bull. Soc. Math. France 56, 98—139 (1928)] et dans un article de Mandelstam et Papalexi [Techn. Phys. USSR 1, 415 (1934); ce Zbl. 11, 302]. Le prolongement analytique par rapport à un paramètre et les valeurs de bifurcation, introduites par Poincaré à propos des figures d'équilibre d'une masse liquide, s'appliquent immédiatement aux phénomènes d'oscillation, ainsi que la théorie des solutions périodiques de la deuxième espèce — „résonance de la n -ième espèce“ [Mandelstam et Papalexi, Z. Physik 73 (1931); ce Zbl. 3, 225]. Un procédé pour traiter les oscillations de relaxation est de considérer des solutions des équations différentielles présentant des sauts, pourvu que l'énergie varie d'une manière continue — en analogie avec la théorie classique des chocs (Chaikin, Andronov, Witt). Une théorie de résonance pour les équations linéaires à coefficients périodiques est due à Gorelik [Z. techn. Physik, Leningrad 4, 1783—1817 (1934); ce Zbl. 11, 68]. L'article contient un aperçu d'un grand nombre de résultats expérimentels.

W. Stepanoff (Moskau).

Kober, C. L.: Zur Theorie der nichtlinearen Verzerrungen und Kipperschwingungen. *Hochfrequenztechn. u. Elektroakust.* 46, 23—26 (1935).

Verf geht aus von der Differentialgleichung: $y'' + \varepsilon y'(a_0 + a_2 y^2) + \omega^2 y = 0$ und ersetzt das Glied $(a_0 + a_2 y^2)$ durch einen periodischen Koeffizienten, wodurch er nach einfacher Umformung auf eine Differentialgleichung vom Hillschen Typus kommt. Durch Anwendung der bekannten Formeln für die Auflösung dieser Gleichung erhält Verf.: die Amplitudenabhängigkeit der Frequenz, die nichtlinearen Verzerrungen, die verzerrenden Kombinationsfrequenzen, die verzerrte Resonanzkurve und die gestörte Superposition.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Vranceanu, G.: La décomposition minimale d'un système de Pfaff. *Bul. fac. ști. Cernăuți* 8, 97—112 (1935).

The paper develops the ideas contained in a previous note by the author (this Zbl. 8, 394). In particular, it gives a necessary and sufficient condition that a minimal decomposition be unique, with special reference to systems of two equations.

J. M. Thomas (Durham).

Vranceanu, G.: Complément au mémoire „La décomposition minimale d'un système de Pfaff“. *Bul. fac. ști. Cernăuți* 8, 267—276 (1935).

It is shown that the two canonical forms of the bilinear covariants arising in the unique minimal decomposition of a pfaffian system of two equations and even class correspond to the nature of the root (simple or double) of the characteristic equation.

J. M. Thomas (Durham).

Miranda, Carlo: Sull'esistenza e l'unicità di una superficie di assegnato bordo verificante una equazione a derivate parziali in forma parametrica. Mem. Accad. Ital. 6, 1023—1045 (1935).

Bedeutet σ eine Fläche mit der Parameterdarstellung $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. Die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform, gebildet für σ , seien D, D', D'' , und es sei $T(\sigma) = T(x, y, z, x_u, y_u, z_u, x_v, y_v, z_v, D, D', D'')$ unabhängig von der speziellen Wahl der Parameter u, v . Es sei weiter σ_0 eine vorgelegte Fläche mit $T(\sigma_0) = 0$, die berandet wird von der geschlossenen Kurve γ_0 . Frage: Gibt es zu jeder geschlossenen Kurve γ , die hinreichend „benachbart“ zu γ_0 ist, eine Fläche σ mit dem Rand γ , die der Gleichung $T(\sigma) = 0$ genügt? Diese Frage wird bejaht unter folgenden Voraussetzungen: 1. Hinreichende Differenzierbarkeit für σ_0 . 2. Hinreichende Nachbarschaft von γ zu γ_0 . 3. σ_0 muß elliptische Lösung sein, d. h. es muß $4 T_D(\sigma_0) \cdot T_{D''}(\sigma_0) - T_{D'}^2(\sigma_0) > 0$ sein. 4. Die Gleichung

$$T_D(\sigma_0) \eta_{uu} + T_{D'}(\sigma_0) \eta_{uv} + T_{D''}(\sigma_0) \eta_{vv} + () \eta_u + () \eta_v + () \eta = f(u, v),$$

die in bekannter Weise aus $T(\sigma_0) = 0$ durch Variation abgeleitet ist (wobei die Variation senkrecht zur Fläche σ_0 genommen wird) muß bei beliebiger Wahl von $f(u, v)$ eine Lösung $\eta(u, v)$ besitzen, die verschwindet auf derjenigen geschlossenen Kurve in der u, v -Ebene, die der Kurve γ_0 entspricht. — Die Fläche σ ist übrigens die einzige Integralfläche mit dem Rande γ , die in einer geeignet definierten Nachbarschaft von σ_0 verläuft.

Rellich (Marburg, Lahn).

Spezielle Funktionen:

Grave, D.: Die Funktionen der mathematischen Physik und die hypergeometrische Reihe. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 3/4, 3—23 u. deutsch. Zusammenfassung 23 (1935) [Ukrainisch].

Einige elementare Beispiele, welche die Rolle der hypergeometrischen Reihe für die Lösung der Differentialgleichungen zweiter Ordnung erklären. *Janczewski.*

Mitra, S. C.: On certain new connections between Legendre and Bessel functions. Proc. Edinburgh Math. Soc., II. s. 4, 111 (1935).

Some integrals involving both Bessel and Legendre functions are evaluated. The following are typical examples.

$$\int_0^1 P_n(1 - 2y^2) J_0(2yz) y dy = (2z)^{-1} J_{2n+1}(2z),$$

$$\int_0^1 P_n(1 - 2y^4) J_0(2yz) I_0(2yz) y^3 dy = (8z)^{-1} \frac{d}{dz} \{ J_{2n+1}(2z) I_{2n+1}(2z) \}.$$

W. N. Bailey (Manchester).

Dhar, S. C.: On the product of parabolic cylinder functions with different arguments. J. London Math. Soc. 10, 171—175 (1935).

In this note a general expansion for the product of parabolic cylinder functions of different argument is derived and the values of some integrals involving them are deduced. Starting from Adamoff's infinite integral for a parabolic cylinder function, a double integral expression is found for a product of the aforesaid type. By a simple trigonometric substitution this double integral, being absolutely convergent, is transformed into an expression, consisting of a finite series of terms, each being the product of two infinite integrals. These integrals represent parabolic cylinder functions of different argument. Thus the product of two such functions of different argument is expanded as a finite series of products of parabolic cylinder functions. Some special cases of this general formula are considered. Taking parabolic cylinder functions of special argument and order as integrands of an infinite integral over a product of two functions, it is shown that such integrals may be evaluated by using the expressions derived previously.

M. J. O. Strutt (Eindhoven).

Bolza, Oskar: Der singuläre Fall der Reduktion hyperelliptischer Integrale erster Ordnung auf elliptische durch eine Transformation dritten Grades. *Math. Ann.* **111**, 477—500 (1935).

Als Verallgemeinerung eines Beispiels von Hermite (*Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **1**) gab Goursat [*Bull. Soc. Math. France* **13** (1884/85)] den Ansatz einer Reduktionstheorie hyperelliptischer Integrale. Genügt nämlich der Radikand

$$R(x) = (x^3 + 3ax + b)(x^3 + 3px + q)$$

folgender Einschränkung $q = 4b + 12ap$, so besteht nach Goursat ein Paar kubischer Polynome $U(x)$, $V(x)$ und das Sextupel von Festwerten

$$\delta, C; \lambda_1, \dots, \lambda_4 \quad (1)$$

derart, daß die Transformation dritten Grades

$$U(x) - zV(x) = 0 \quad (2)$$

die in x identische Aussage bewirkt:

$$\frac{dx(x - \delta)}{\sqrt{R(x)}} = C \frac{dz}{\sqrt{(z - \lambda_1) \dots (z - \lambda_4)}}. \quad (3)$$

Bei vorgegebenem $R(x)$ lieferte Goursats Verfahren zwei verschiedene Sextupel (1) zur Erzeugung elliptischer Differentiale in (3). Offen blieb die Frage, ob durch Wahl geeigneter U , V in (2) noch weitere Systeme (1) zu finden sind, welche (3) befriedigen. Die lückenlose Beantwortung des Problems gelingt durch sorgfältige algebraische Diskussion der möglichen Einzelfälle. Setzt man den Ausdruck

$$4(ap - q)^2(qp^3 + 4ap - \frac{5}{4}q) + 13pq(ap - q)(\frac{1}{4}p^2 - a) + 4aq(\frac{1}{4}p^2 - a)^2 = F(p, q, a),$$

so kann der Fall

$$F(p, q, a) = 0 \quad (4)$$

als singulär bezeichnet werden, insofern nur unter der Bedingung (4) bei vorgegebenem R noch weitere Systeme (1) neben den Goursatschen Lösungen existieren. Verschwindet überdies der Bestandteil $11p^2 - 4a$ in F , so treten noch weitere Lösungen hinzu. Übrigens bestimmt sich im singulären Fall

$$\delta = \frac{p^2q - a(4q + 12p^3) + 8pa^2}{16p^2a - 4a^2 - 5pq},$$

also eindeutig, bis auf Vertauschung der kubischen Faktoren in R . Unter Bezugnahme auf eine Arbeit von J. I. Hutchinson (*Diss. Chicago* 1897) werden auch die Grenzfälle nur quadratischer U , V gruppentheoretisch eingeordnet und Anschluß gewonnen an die Ergebnisse von J. H. McDonald [*Trans. Amer. Math. Soc.* **7** (1906)].

Wilhelm Maier (Stuttgart).

Differenzengleichungen:

Miniatow, A. K.: Vergleichende Untersuchung von Differential- und Differenzengleichungen. *Mitt. Forsch.-Inst. Math. u. Mech. Univ. Tomsk* **1**, 1—22 u. dtsch. Zusammenfassung 22 (1935) [Russisch].

This paper (the title is somewhat misleading; numerous misprints) represents an attempt to solve the difference equation

$$y(x + \omega, \omega) - y(x, \omega) = \omega \varphi[x, y(x, \omega)] \quad (1)$$

(ω — difference interval, φ given) by means of power series

$$\eta(x) + \eta_1(x)\omega/1! + \eta_2(x)\omega^2/2! + \dots, \quad (2)$$

to which we apply Borel's method of summation. — The question as to the existence of solutions represented by convergent series (2) is left out, as the author states explicitly (thus the treatment of some examples in the first part lacks necessary rigor). —

By formally substituting (2) into (1), we get, tacitly assuming the existence of $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, a set of differential equations for η, η_1, \dots :

$$\eta'(x) = \varphi(x, \eta), \quad \eta_1'(x) - \frac{\partial \varphi(x, \eta)}{\partial \eta} \eta_1 = -\frac{1}{2} \eta''(x), \dots \quad (3)$$

[(2) may be considered as a generalization of Euler-Maclaurin summation formula, which is derived from (2) in the special case $\varphi(x, y) \equiv \varphi(x)$]. Borel summation, applied to (2), yields:

$$y(x, \omega) = \int_0^\infty e^{-t} F(x, t\omega) dt, \quad F(x, t) = \sum_{\nu=0}^\infty \frac{t^\nu}{(\nu!)^2} \eta_\nu(x). \quad (4)$$

The study of the integral in (4) — its existence and relation to (1) — is made for the following special cases:

$$\begin{aligned} y(x + \omega, \omega) - y(x, \omega) &= \omega \varphi'(x) \\ y(x + \omega, \omega) - y(x, \omega) &= \frac{m\omega y(x, \omega)}{x - a}, \end{aligned}$$

where $\varphi(x)$ and the constants m, a are properly specified so as to insure the existence of a "resolvent" for (1)

$$\varphi(x, \omega) = \zeta(x) + \zeta_1(x) \frac{\omega}{1!} + \zeta_2(x) \frac{\omega^2}{2!} + \dots, \quad \left(\begin{array}{l} \zeta(x) = \eta(x), \\ \zeta_k^{(\infty)}(x) = \eta_k(x) \end{array} \right)$$

i.e. a series which converges for $|\omega| \leq r$ and for all complex x , save, perhaps, certain isolated points. The study of (4) is achieved by means of

$$F(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|v|=\rho \leq r} \psi\left(x + \frac{t}{v}, v\right) \frac{dv}{v}.$$

The paper closes with an application of the above considerations to the system of difference equations

$$\begin{aligned} y_i(x + \omega, \omega) - y_i(x, \omega) &= \omega \sum_{s=1}^n P_{is}(x) y_{is}(x, \omega) + \omega \varphi_i(x) \\ (P_{is}, \varphi_i \text{ given}; i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

J. Shohat (Philadelphia).

Broggi, U.: Über die Verallgemeinerung eines Problems von Nörlund. Rev. mat. hisp.-amer., II. s. 10, 105—115 (1935) [Spanisch].

Ausgehend von dem Begriff „Hauptlösung“ der besonderen Differenzengleichung $y_{x+1} - y_x = \varphi(x)$ als jener Lösung, welche ein Polynom wird, wenn $\varphi(x)$ ein Polynom ist, wird für die allgemeine inhomogene Differenzengleichung mit konstanten Koeffizienten $(A) \dots y_{x+p} + a_1 y_{x+p-1} + \dots + a_p y_x = \varphi(x)$ der Begriff „verallgemeinerte Hauptlösung“ (Broggi: solución propiamente principal) eingeführt; ist $\varphi(x) = u^x \Phi(x)$ (u konstant, $\Phi(x)$ Polynom), so ist die verallgemeinerte Hauptlösung von (A) von der Form $u^x \Psi(x)$ ($\Psi(x)$ Polynom). Führt man neben dem Operator $\Delta \dots \Delta y_x = y_{x+1} - y_x$ den Operator $\mathsf{T} \dots \mathsf{T} y_x = y_{x+1} - u y_x$ (u konstant) ein und bringt (A) in die Formen $M(\Delta) y_x = \varphi(x)$ bzw. $N(\mathsf{T}) y_x = \varphi(x)$, so kann man bekanntlich formal die Lösung erhalten, indem man schreibt: $y_x = \frac{1}{M(\Delta)} \varphi(x)$ bzw. $y_x = \frac{1}{N(\mathsf{T})} \varphi(x)$ und die Symbole nach steigenden Potenzen von Δ bzw. T entwickelt; die Ausdrücke $\frac{1}{\Delta^n} \varphi(x)$ lassen sich durch Hauptlösungen ausdrücken, die Ausdrücke $\frac{1}{\mathsf{T}^n} \varphi(x)$ lassen sich vermittels verallgemeinerter Hauptlösungen angeben (man beachte nur die Relation $\mathsf{T}(u^x z_x) = u^{x+1} \Delta z_x$).

F. Knoll (Wien).

Variationsrechnung:

Tonelli, L.: Sulle estremaloidi del calcolo delle variazioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 21, 289—293 (1935).

An absolutely continuous curve $y = y_0(x)$ is an extremaloid with respect to $f(x, y, y')$ if it satisfies the equation

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f_y(x, y_0, y'_0) dx - \int_a^x f_{y'}(x, y_0, y'_0) dx = \text{const.} \quad (1)$$

In order that a curve C_0 , every interior arc of which is an extremaloid, shall itself

be an extremaloid, certain additional hypotheses on f are needed. Here it is shown that the condition

$$|f_y| \leq K\{|y'| + |f| + N(x)\}\{1 + |f_y|\} \quad (2)$$

is adequate, where K is a non-negative constant and $N(x)$ a non-negative function summable over (a, b) . It is in fact enough to assume that (2) holds for the arguments $(x, y_0(x), y'_0(x))$ for almost all x . A similar result obtains for pseudo-extremaloids, which satisfy (1) with $f_y, f_{y'}$ replaced by $f_x, f - y'f_{y'}$ respectively. *E. J. McShane.*

Manià, B.: *Sopra alcuni problemi condizionati del calcolo delle variazioni.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 426—432 (1935).

In a recent paper (Rend. Circ. mat. Palermo **58**; Zbl. **10**, 119) the author gave impeccable proofs of some existence theorems concerning the Mayer problem, and then stated without proof the possibility of extension. One such extension concerned the addition of conditions

$$g_k[x(0), \dots, u_m(0); x(L), \dots, u_m(L)] = 0. \quad (1)$$

Three possibilities exist; (α) (1) can be added without strengthening of hypotheses; (β) (1) can be added with strengthening of hypotheses; (γ) (1) can never be added. Author and reviewer agree on the correctness of (β). In Zbl. **10**, 119 the author meant (β), omitting however to mention the particular hypotheses which he had in mind. But the reviewer (among others) misunderstood the author to have meant (α), and commented that this is false. The author misunderstood the reviewer's comment to mean the absurd (γ), and the present paper was written to disprove (γ).

E. J. McShane (Princeton).

Lefschetz, S.: *A theorem of extremals. I.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 272 bis 274 (1935).

Il s'agit d'un théorème établissant l'égalité de deux „indices“ dont l'un désigne le nombre des carrés négatifs d'une forme quadratique générale réduite à une somme de carrés, et l'autre l'ordre de contact d'une extrémale avec l'enveloppe d'un certain faisceau dont elle fait partie. — Considérons un problème de Calcul des variations, régulier et positif, concernant l'intégrale

$$J(A, B) = \int_A^B f(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx,$$

la fonction sous le signe \int étant analytique. Soient g une extrémale indéfinie dans les deux sens, M_n et M_n^* deux variétés analytiques auxquelles l'extrémale g est transversale (sans leur être tangente) en A et B , $\{\gamma\}$ et $\{\gamma^*\}$ les faisceaux d'extrémales transversales à M_n respectivement à M_n^* et ayant g pour élément commun, enfin A, A^1, A^2, \dots les foyers successifs de A (dans le sens AB) et B^{-1}, B, B^1, \dots ceux de B . Sur une extrémale γ^* très voisine de g , les variétés M_n et M_n^* interceptent l'arc $A'B'$ et

$$J(A', B') = J(A, B) + \varphi_2(z_1, z_2, \dots) + \varphi_3(z_1, z_2, \dots) + \dots$$

où z_1, z_2, \dots sont les coordonnées caractérisant l'extrémale γ^* et s'annulant lorsque γ^* coïncide avec g , φ_i une forme de degré i et, en particulier, φ_2 une forme quadratique non dégénérée. Si h est le nombre des carrés négatifs de φ_2 (supposée réduite à une somme de carrés) et k l'ordre de contact de l'extrémale g en A^1 avec l'enveloppe du faisceau $\{\gamma\}$, alors on a $h = k$ pourvu que les foyers $B^{-1}A^1AB^1A^2$ se suivent dans l'ordre où nous venons de les écrire. *A. Szűcs (Budapest).*

Lefschetz, S.: *A theorem on extremals. II.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 362 bis 364 (1935).

I. see the prec. review.

Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:

Reichenbach, Hans: *Bemerkungen zu Karl Marbes statistischen Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Erkenntnis **5**, 305—322 (1935).

Lévy, Paul: La loi forte des grands nombres pour les variables enchainées. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 493—495 (1935).

Es wird gezeigt, wie man durch eine leichte Verschärfung der in einer früheren Arbeit [Bull. Sci. math., II. s. **59** (1935); vgl. dies. Zbl. **11**, 262] abgeleiteten Abschätzungen für gewisse Folgen voneinander abhängiger statistischer Variablen zu einem Analogon des Satzes vom iterierten Logarithmus gelangen kann. *W. Feller*.

Hosiassonówna, Janina: Contribution à la notion de probabilité comme limite des fréquences. Wiadom. mat. **39**, 135—144 u. franz. Zusammenfassung 145 (1935) [Polnisch].

Für die Merkmalfolgen einer gewissen Klasse W sei jedem Merkmal eine Zahl (die Wahrscheinlichkeit des betreffenden Merkmals in der betreffenden Folge) zugeordnet. Folgende Forderung sei erfüllt: Haben alle Elemente einer Folge das Merkmal f , so gehört diese Folge zur Klasse W , und die Wahrscheinlichkeit von f in dieser Folge ist gleich 1. Läßt man in einer Folge der Klasse W die ersten $k-1$ Elemente fort, so bedeute $n_E^{(k)}$ in der so entstandenen Folge die Anzahl derjenigen unter den n ersten Elementen, welche das Merkmal E aufweisen. Verf. bemerkt nun: Die Annahme, daß für eine Folge aus W die Häufigkeiten $n_E^{(k)}:n$ mit $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig in k gegen einen Grenzwert konvergieren, führt zu Aussagen, welche in der gewöhnlichen Wahrscheinlichkeitsrechnung falsch sind. *Birnbaum* (Lwów).

Fréchet, Maurice: Sur l'équation fonctionnelle de Chapman et sur le problème des probabilités en chaîne. Proc. London Math. Soc., II. s. **39**, 515—540 (1935).

L'équation de Chapman écrite sous la forme

$$f(M, s; P, t) = \int_V f(M, s; Q, u) f(Q, u; P, t) dQ \quad (1)$$

où dQ est l'élément (entourant le point Q) dans la région V et où l'intégrale est ν -uple admet solutions de la forme

$$f(M, s; P, t) = \sum_{i=1}^n A_i(M, s) B_i(P, t) \quad (2)$$

où les A_i et B_i forment un système biorthonormé sur V , c'est à dire on a

$$\int A_i(Q, u) B_j(Q, u) dQ = \delta_{ij} \quad \text{avec} \quad \delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j.$$

L'auteur montre que (1) est la forme nécessaire de solution de (1) quand on admet que f satisfasse à certaines conditions très générales données explicitement. Mais la forme (2) doit être rejetée quand on cherche à exprimer par une solution de (1) une densité de probabilité de passage. Les applications au calcul des probabilités conduisent à introduire au lieu de (2) une somme infinie de la même forme; A_i et B_i ($i = 1, 2, \dots$) forment alors un système biorthonormé et elles satisfont aux équations de Fredholm associées (quels que soient $t > u > s$)

$$A_i(M, s) = \int_V f(M, s; P, u) A_i(P, u) dP \quad (3)$$

$$B_i(M, s) = \int_V f(Q, t; M, s) B_i(Q, t) dQ. \quad (4)$$

Pour qu'une fonction f satisfaisant à (1) puisse être exprimée par une série infinie de forme (2) où il faut mettre $n = \infty$ il faut et il suffit que parmi les systèmes de solutions de (3) il en existe un qui soit complet; et de même pour (4). Exemple particulier de solution de (1) dans le cas d'une dimension (voir aussi ce Zbl. **10**, 70).

B. Hostinský (Brno).

● **Anderson, Oskar N.:** Einführung in die mathematische Statistik. Wien: Julius Springer 1935. V, 314 S. u. 9 Abb. RM. 22.—.

The present work represents a very ably undertaken attempt to help the mature student who needs to be able to use modern statistical methods in his research but whose mathematical equipment is limited. The material, always closely related to the theory of probability, is chosen to be of interest to workers in the social sciences, and the mathematical developments

are limited to those which may be effected with elementary algebra. The author has chosen to write a unified book rather than a compendious one; being a distinguished member of the school associated with Lexis, Bortkewitsch, and Tchuprow, he emphasizes its contributions and its concern with the logical side of the subject. Many students whose formal knowledge of mathematics and statistics go well beyond the material in this book will find their statistical education greatly benefited by Professor Anderson's careful and thorough discussions designed to help the student understand the concepts and processes taken up. — An interesting feature is the consistent use of the idea of assemblages (*Gesamtheiten*) of higher and lower order throughout. (An assemblage of lower order, or set of values assumed by a stochastic variable, is to be regarded as a sample from one of higher order.) Thus the population is a "*Gesamtheit höherer Ordnung*", usually taken to be finite in this work, and a statistical definition of probability, very close to the one employed by R. A. Fisher is very simply stated. — The main body of the material is divided into the theory of homograde and heterograde *Gesamtheiten* (observing Charlier's distinction). The main topics treated under the former are: after a good discussion of the fundamental ideas of the theory of probability, there is a careful development of the symbolic binomial expansion for drawings without replacements. (The more commonly treated case is only a special one.) The exponential approximation to the second order is worked out for the terms of the expansion and the use of the definite integral and the tables for the normal frequency function to find the sums of ordinates are explained. The difficulties involved in the use of Bayes' theorem to infer from the sample to the population are "avoided" by a very well discussed appeal to the principle of large numbers. The law of small numbers and the principle and the use of the χ^2 -test are more briefly but carefully treated. For the heterograde theory, after a discussion of means, measures of dispersion, and moments and semi-invariants (or cumulants), the idea of mathematical expectation is naturally given considerable prominence with considerable space being given to the matter of finding a satisfactory expression for the expected value of a quotient. The discussion of generalized Markoff inequalities is very excellent indeed, deriving Thebycheff's, Guldberg's and Pearson's forms as special cases. The sampling problem is taken up in detail so far as finding the expected value and variance of a mean, the expected value of the variance, and a few slightly more complicated results are concerned. The normal frequency function is presented as the plausible limiting frequency function of means in samples of n as $n \rightarrow \infty$. To attack the indirect problem of inferring from the sample to the population, the Markoff inequalities are used along with another appeal to the principle of large numbers. — The treatment of correlation is very brief, though clear, going little beyond the idea of linear regression and the meaning of the correlation ratio. — Certain other up to date topics are discussed briefly, such as R. A. Fisher's theory of estimation, the theory of small samples associated with the same name, E. S. Pearson and Neyman's sampling criteria, stratified sampling and purposive selection, etc. — Though the developments use only elementary algebra they are nevertheless sometimes fairly lengthy. This with the degree of maturity and the general acquaintance with statistical questions necessary to appreciate the discussion makes this a fairly difficult book for beginners. It is an open question to the reviewer whether or not the degree of mathematical maturity required can ordinarily be gained except through the study of mathematics,

C. C. Craig (Ann Arbor, Mich.)

Geiringer, Hilda: *Methoden der theoretischen Statistik.* Compositio Math. 2, 276 bis 320 (1935).

Die Arbeit enthält in erster Reihe einen ausführlichen zusammenfassenden Bericht über die an verschiedenen Stellen publizierten Ansätze der Verf. zur Frage nach Kriterien dafür, ob man eine Reihe von empirischen Versuchsergebnissen als Werte einer statistischen Variablen ansehen darf, deren Verteilungsfunktion $p(x)$ der Form nach bekannt ist, aber noch von gewissen zu bestimmenden Parametern abhängt. (Vgl. die Darstellung der Methode dies. Zbl. 8, 265; ferner auch 8, 368 und 11, 218f.) Die Grundaufgabe bei der Durchführung dieser Methode ist es, eine Funktion F der empirischen Momente zu finden, deren Erwartungswert mit einer vorgegebenen Funktion G übereinstimmt (die man sich, unter weitem Spielraum für Willkür, durch Elimination der Parameter aus den Gleichungen für die Momente von $p(x)$ verschafft). Es wird nun eine exakte Lösung dieser Aufgabe für den Fall gegeben, daß G ein Polynom ist, und dann mit Hilfe von Taylorentwicklungen eine Näherungsmethode in allgemeineren Fällen. Ferner werden Näherungsmethoden für die praktische Ausrechnung von Streuungen und Erwartungswerten angegeben. Schließlich Vorschriften für den Fall, daß es sich um mehrere verschiedene Verteilungsfunktionen $p_n(x)$ handelt.

W. Feller (Stockholm).

Eyraud, H.: Valori osservati di una variabile casuale e loro perequazione. Giorn. Ist. Ital. Attuari 6, 243—255 (1935).

Es wird eine Methode zum Vergleich beobachteter und theoretischer Verteilungen entwickelt, die dem Summenlinienverfahren (vgl. auch dies Zbl. 11, 315f. [Wold]) eng verwandt ist, die aber auf gewissen Approximationen beruht. *H. Wold.*

Krawtchouk, M.: Sur les écarts moyens des coefficients de corrélation et de régression. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 3/4, 121—131 u. franz. Zusammenfassung 131 (1935) [Ukrainisch].

Wenn die Abweichungen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ der Variablen x, y, z, \dots von ihren arithmetischen Mitteln M_x, M_y, M_z, \dots im Durchschnitt genügend kleine Werte annehmen, so gilt für eine beliebige Funktion $f(x, y, z, \dots)$ folgende Näherungsformel:

$$f(x, y, z, \dots) \approx f(M_x, M_y, M_z, \dots) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\alpha + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\beta + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\gamma + \dots,$$

wobei ∂f für $\partial f(M_x, M_y, M_z, \dots)$ steht. Sind ihrerseits die Variablen x, y, z, \dots arithmetische Mittel aus einer genügenden Anzahl k von entsprechenden Elementen, so sieht Verf. seine Formel als „für die Praxis genau“ an. Mit Hilfe dieser Formel werden nun gewisse Ausdrücke für die mittleren Fehler des Korrelations- und des Regressionskoeffizienten abgeleitet, die wohl vom Verteilungsgesetze der Variablen unabhängig, aber für die Praxis recht schwerfällig sind. Verf. gibt ihre oberen Grenzen wie folgt an:

$$\sigma_{r(0)} \leq \frac{1 + |\rho^{(0)}|}{2k\sigma_x^{(0)}\sigma_y^{(0)}} \sqrt{[(\alpha_0^2 + \beta_0^2)^2]} \quad \text{und} \quad \sigma_{\varrho_{yz}^{(0)}} \leq \frac{1 + 2|\varrho_{yz}^{(0)}|}{\sigma_x^{(0)2} \sqrt{2k}} \sqrt{\frac{[(\alpha_0^4 + \beta_0^4)]}{k}}.$$

O. Anderson (Sofia).

Guldberg, Sven: Sur les formules de récurrence des semi-invariants de la loi de Bernoulli et de la loi de Pascal à n variables. C. R. Acad. Sci., Paris 201, 376—378 (1935).

Verallgemeinerung zweier Formeln von R. Frisch und P. Qvale [siehe C. R. Acad. Sci., Paris 194, 150 (1932); dies. Zbl. 3, 267 Qvale]. *H. Wold* (Stockholm).

Weida, Frank M.: On certain distribution of functions when the law of the universe is Poisson's first law of error. Ann. math. Statist. 6, 102—110 (1935).

The author treats systematically Poisson's first law of error, $f(x) = (k/\sigma) \exp(-|x|/\sigma)$, and obtains by a single method of analysis, explicit formulas for the corresponding distribution functions for n -variate samples of (1) the arithmetic mean, (2) the variate-difference, (3) the variate-quotient, (4) the variance, (5) the geometric mean, (6) the harmonic mean. One observes that the variate-difference follows an analogous law, the frequency of the variance (for $n \geq 3$) is proportional to $s^{n-3} \exp(-s^2)$. The frequency of the harmonic mean, H , is proportional to H^{1-3n} . In the other cases the explicit formula retains an n -fold differentiation. References to 13 sources in the literature indicate some scattered and partial results previously obtained.

Albert A. Bennett (Providence).

Vaidyanathaswamy, R.: On the arithmetico-logical symmetric functions of n attributes. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 2, 54—62 (1935).

Der Verf. beschäftigt sich mit der statistischen Theorie der Attribute und hebt den Parallelismus zwischen zwei dort gleichzeitig angewendeten Gedankengängen hervor; dies sind einerseits der logische Kalkül für die Kombinationen bestimmter Attribute und andererseits der arithmetische Kalkül für die Zahl von Individuen, denen ein gegebenes Attribut zukommt. Nach Ableitung zweier allgemeiner Sätze befaßt sich der Verf. systematisch mit den von ihm eingeführten symmetrischen arithmetisch-logischen Funktionen von n Attributen.

Bruno de Finetti (Trieste).

Chapman, Dwight W.: The generalized problem of correct matchings. Ann. math. Statist. 6, 85—95 (1935).

The author considers the statistical problem of matching two series of unequal length, the longer series containing not only a true apposite for each item of the shorter series but in addition a certain number of extraneous items which cannot be correctly

matched with any items in the shorter series. He first computes by elementary methods the probability of at least s correct matchings for two series of t , and u items respectively, ($t \leq u$). He considers next the distribution of s correct matchings resulting from n independent trials and concludes that a Pearson Type III curve is an adequate approximation for the distribution of the mean s , save for n small. The work is illustrated by numerical conclusions for the case of 10 judges presented with 5 character sketches and 8 specimens of handwriting, 5 of which are true opposites of the sketches. The author makes use of the tables of L. R. Salvosa, *Ann. math. Statist.* **1**, 191—198 (1930).

Albert A. Bennett (Providence).

Bartlett, M. S.: Some aspects of the time-correlation problem in regard to tests of significance. *J. Roy. Statist. Soc., N. s.* **98**, 536—543 (1935).

The author discourses upon numerous practical features suggested by extensive experience in dealing with time-correlation problems. In particular he treats critically the questions of serial-correlation for one and for two series: of the splitting of long series in preference to introducing high-order trends; of the efficiency and limitations of the variate-difference method; and of the statistical significance of correlation. Included are illustrative examples, and references to more extensive material in the literature.

Albert A. Bennett (Providence).

● **Uven, M. J. van:** Mathematical treatment of the results of agricultural and other experiments. Groningen-Batavia: P. Noordhoff N. V. 1935. VI, 309 pag. Fl. 9.50.

The major part of this work is devoted to a careful exposition of the basic principles of mathematical statistics illustrated by applications to agricultural problems but assuming little beyond elementary algebra. The abstract features are emphasized as is evidenced by the large proportion of formulas, by the free use of technical notation, and by the semi-postulational treatment of some of the concepts. Among the topics here treated and not always found in texts on the subject may be mentioned the extensive study of the distribution of the ratio of given variates. The theory of least squares is handled adequately for the reduction of indirect observations. Of particular interest for agriculture and analogous lines of investigation, are the hundred-odd pages devoted to the analysis of trial field data and resultant fertility maps, a subject whose practical importance has received recently wide recognition. Few of the elementary texts on mathematical statistics provide theoretical foundation for applications to this interesting problem. The case of two or more types of crops, the analysis of the variance, with due regard to the number of degrees of freedom involved, and finally the theory of adjustment of direct conditioned observations, are treated with a completeness rendering this text, outstanding in its field. Four lengthy appendices deal respectively with (I) the table of probabilities, (II) the asymptotically averaged values of the various powers of t , (III) the refinement of the formula for the mean error in the case of geometric adjustment of a ratio, (IV) the technique for the solution of the normal equations in the method of least squares. The author is generous in timely reference to contemporary contributions to the recent developments of the theory. The classical topics are presented with only occasional historical hints as is doubtless fitting.

Albert A. Bennett.

Berger, Alfred: Über den Reziprozitätssatz der Gewinntheorie. *Arch. math. Wirtsch.-u. Sozialforsch.* **1**, 75—84 (1935).

Als Reziprozitätssatz der Gewinntheorie bezeichnet Verf. den folgenden Sachverhalt: Der Dividendenfonds (Überschuß des nach Grundlagen zweiter Ordnung gerechneten vollständigen Deckungskapitals über das nach Grundlagen erster Ordnung bestimmte ausreichende Deckungskapital) kann prospektiv als Barwert der künftigen Dividenden abzüglich der künftigen Kontributionsgewinne berechnet werden, und zwar kann man entweder die Barwertbestimmung nach Grundlagen erster Ordnung vornehmen und die Kontributionsgewinne unter Zugrundelegung des vollständigen Deckungskapitals berechnen, oder man verwendet zur Bestimmung des Barwertes Grundlagen zweiter Ordnung und berechnet die Kontributionsgewinne nur auf Grund des ausreichenden Deckungskapitals. — Dieser Satz wird mit der kontinuierlichen Methode, für welche er vom Verf. ursprünglich angegeben wurde (C. R. IX. Congr. Intern. Act. Stockholm 1930, 23—34), neu bewiesen und dann wird gezeigt, daß er auch in der diskontinuierlichen Betrachtungsweise volle Geltung hat.

Birnbaum (Lwów).

Vajda, Stefan: Über Wahrscheinlichkeiten in der Theorie der Versicherung verbundener Leben. *Assekuranz-Jb.* 54, 38—55 (1935).

Untersuchungen darüber, in welchen Fällen die in der Theorie der Versicherung verbundener Leben vorkommenden Wahrscheinlichkeiten durch einfachere Wahrscheinlichkeiten ausgedrückt werden können. *Birnbaum* (Lwów).

Phillips, E. William: The curve of deaths. *J. Inst. Actuar.* 66, 17—62 (1935).

Numerische und graphische Methoden.

Horst, Paul: A method for determining the coefficients of a characteristic equation. *Ann. math. Statist.* 6, 83—84 (1935).

Die Koeffizienten c_i der charakteristischen Gleichung der Matrix A als Summen aller entsprechenden Diagonalminoren von A zu bestimmen, ist im allgemeinen umständlich. Verf. berechnet sie daher sukzessive aus den Newtonschen Identitäten $S_p + c_1 S_{p-1} + c_2 S_{p-2} + \dots + c_{p-1} S_1 + p c_p = 0$ für die Potenzsummen S_p der Gleichungswurzeln. S_p andererseits ist nach einem bekanntem Determinantensatz gleich der Spur von A^p . *Bodewig* (Basel).

Steerman, E.: New method for the solution of certain algebraic equations applied in mathematical physics and technics. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 1, 83 bis 88 u. engl. Zusammenfassung 88—89 (1934) [Ukrainisch].

Der Titel ist irreführend: es handelt sich nicht um die Auflösung einer Gleichung, sondern um ihre Aufstellung. — Als besonders geeignet zur numerischen Berechnung der zu einem linearen Gleichungssystem $\sum_i (a_{ik} - \delta_{ik} x) c_i = 0$ ($i, k = 1 \dots n$; δ_{ik} das

Kroneckersche Symbol) gehörigen Säkulargleichung empfiehlt Verf. das Verfahren der sukzessiven Elimination der Unbekannten c_i mittels der üblichen (Gaußschen) Anordnung. Die Rechnung wird an zwei Beispielen von 4 Gleichungen mit 4 Unbekannten erläutert. — Für diese Anzahl der Gleichungen ist unmittelbar formal ersichtlich, daß die gewählte Anordnung der Elimination zu einer Resultanten von dem richtigen Grade 4 führt. Für mehr Gleichungen ergibt sich aber formal ein zu hoher Grad der Resultanten, es heben sich also Glieder weg, und Ref. bezweifelt deshalb, daß die Methode auch dann bequem anwendbar bleibt. *O. Blumenthal* (Aachen).

Tumarkin, S.: On the evaluation of errors in the method of means. *Trans. Centr. Aero-Hydrodyn. Inst.* Nr 198, 1—14 u. engl. Zusammenfassung 15—16 (1935) [Russisch].

Gegeben sind N lineare Gleichungen mit fehlerhaften rechten Seiten für $s (< N)$ Unbekannte. Die Bestimmung einer Ausgleichslösung nach der Methode der kleinsten Quadrate verlangt die unbequeme Aufstellung der Normalgleichungen. Verf. empfiehlt besonders bei $N \gg s$ Ersatz der Normalgleichungen nach der „Methode der Mittel“: Die Gleichungen werden irgendwie in s Gruppen eingeteilt und gruppenweise addiert. Die Lösung x, y, \dots des entstehenden Systems von s Gleichungen liegt meist nahe bei der Ausgleichslösung nach der Methode der kleinsten Quadrate; der Verf. gibt selbst ein Gegenbeispiel an. Die mittleren Fehler $\epsilon_x, \epsilon_y, \dots$ der Tumarkinschen Lösung x, y, \dots sind dem mittleren Fehler ϵ der rechten Seiten mit bekannten Faktoren proportional; ϵ wird nach oben abgeschätzt, indem man in der üblichen Formel

$$\epsilon = \sqrt{\frac{[v v]}{N - s}}$$

die Verbesserungen v mit Hilfe der Tumarkinschen Lösung berechnet. In Zahlenbeispielen ist diese Abschätzung günstig. *Theodor Zech* (Darmstadt).

Krawtchouk, M.: Le principe de la moyenne arithmétique et la méthode des moindres carrés. *J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine* Nr 2, 65—85 u. franz. Zusammenfassung 85—86 (1935) [Ukrainisch].

Für eine Beobachtungsreihe aus n Werten, eine Auswahl von k Werten hieraus und die Durchschnitte aller Auswahlen von je k Werten leitet der Verf. Beziehungen

zwischen den Durchschnitten und Streuungen her. Die Gewichte der Beobachtungen werden gleich oder ganzzahlig angenommen. Die Formeln werden zur Untersuchung der Auflösung von linearen Gleichungssystemen nach der Methode der kleinsten Quadrate angewandt. Dabei sollen nicht nur die Beobachtungen, sondern auch die Gleichungskoeffizienten mit Fehlern behaftet sein. Bei k Gleichungen für $l (< k)$ Unbekannte ergibt sich für die Streuungen $\sigma_x^{(0)}$ der Einzelbeobachtung und $\sigma_{M_x}^{(0)}$ des Durchschnitts unter gewissen vereinfachenden Annahmen für $l = 1$ und $l = 2$ die klassische Formel

$$\sigma_{M_x}^{(0)} = \frac{\sigma_x^{(0)}}{\sqrt{k-l}},$$

bei größerem l aber

$$\sigma_{M_x}^{(0)} \approx \sqrt{\frac{l(l-1)}{2}} \cdot \frac{\sigma_x^{(0)}}{\sqrt{k-l}}.$$

Bei anderen Vereinfachungen tritt an Stelle des Faktors $\sqrt{\frac{l(l-1)}{2}}$ der Faktor \sqrt{l} .

Theodor Zech (Darmstadt).

Wong, Y. K.: An application of orthogonalization process to the theory of least squares. Ann. math. Statist. 6, 53—75 (1935).

Die „Normalgleichungen“ der Ausgleichsrechnung werden gewöhnlich nach der Gaußschen Substitutionsmethode gelöst. Verf. fragt sich, ob die Gaußsche Substitutionsmethode immer durchführbar sein muß bzw. welches die Bedingungen dafür sind. Er findet als notwendige und hinreichende Bedingung: Sind in $l = p_1 x_1 + \dots + p_r x_r$ für die r Parameter x_i ($i = 1, 2, \dots, r$) je n ($\geq r$) Beobachtungen a_{i1}, \dots, a_{in} gemacht, so müssen die r Vektoren $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ voneinander linear unabhängig sein; in Worten: die Beobachtungssätze für die einzelnen Parameter müssen linear unabhängig sein. Er verwendet Ausdrucksweise und Bezeichnungen der linearen Algebra, deren Sätze er sich aber im nötigen Umfange größtenteils selbst herleitet. Die Gaußsche Substitutionsmethode wird in Beziehung zur Orthogonalisierung von Funktionsfolgen gesetzt. Praktische Anwendungen in einer weiteren Arbeit werden angekündigt.

Theodor Zech (Darmstadt).

Müller, Hans: Über die Behandlung von Mittelwerten aus einem Beobachtungsmaterial von geringem Umfang. II. Mitt. Ann. Hydrogr. 63, 155—161 (1935).

Müller, Hans: Über die Behandlung von Mittelwerten aus einem Beobachtungsmaterial von geringem Umfang. III. Mitt. mit einem Abschnitt über Theorie und Praxis der Korrelationsrechnung. Ann. Hydrogr. 63, 224—234 (1935).

I. vgl. dies. Zbl. 10, 73.

Mikeldadze, Ch. E.: De la résolution numérique des équations intégrales. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 2, 255—297 u. franz. Zusammenfassung 297—300 (1935) [Russisch].

In der Integralgleichung

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds + f(x)$$

für $\varphi(x)$ mit gegebenem stetigem $K(x, s)$ und $f(x)$ ersetze man die Integration durch eine Summation, indem man eine passende Quadraturformel mit Stützstellen von gleichem Abstände h benutzt. Man erhält bei Vernachlässigung des Restgliedes eine lineare Rekursionsformel für Näherungswerte von $\varphi(x)$ an den Stützstellen. Ist das vernachlässigte Restglied $O(h^k)$, so ist auch der Fehler dieser Näherungswerte gegenüber den richtigen φ -Werten $O(h^k)$. Der Verf. zeigt für einfache Beispiele, daß sich bei erträglicher Rechenarbeit auch praktisch brauchbare Näherungswerte ergeben. Als Beispiele dienen Integralgleichungen, die durch Umformung von Differentialgleichungen unter Einarbeitung von Anfangsbedingungen gewonnen sind; ferner wird die Berechnung von Eigenwerten einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit nichtkonstanten Koeffizienten nach dem Näherungsverfahren behandelt. Zum Schluß wird

eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung von hyperbolischem Typus auf eine zweidimensionale Integralgleichung zurückgeführt, deren Lösung sich entsprechend annähern läßt.

Theodor Zech (Darmstadt).

Hartree, D. R.: The differential analyser. *Nature* **135**, 940—943 (1935).

Beschreibung eines Gerätes zur Lösung von Differentialgleichungen, entsprechend der Apparatur von V. Bush (dies. Zbl. **3**, 65 und Proc. Internat. Congress on Applied Mechanics, Cambridge 1934). Konstruktionseinzelheiten über die Änderungen gegenüber der Ausführung von Bush sind nicht angegeben. *G. Koehler* (Darmstadt).

Vietoris, L.: Ein einfacher Integrator. *Z. angew. Math. Mech.* **15**, 238—242 (1935).

Es handelt sich um ein Hilfsmittel zur graphischen Integration, das lediglich aus einer Fahrmarke und einem Zeichenstift besteht, der durch eine Rolle gezwungen wird, die Schleppkurve im Abstand 1 (Fahrmarke—Zeichenstift) zu der von der Fahrmarke beschriebenen Kurve zu beschreiben. Die Selbstanfertigung des Gerätes ist leicht möglich, die Justierung wird ausführlich beschrieben. Die Anwendung beruht auf einer der Picardschen ähnlichen Iteration, deren Konvergenz Verf. früher zeigte (vgl. dies. Zbl. **4**, 148 und **10**, 258). Die Anwendung wird an verschiedenen Beispielen erläutert.

G. Koehler (Darmstadt).

Geometrie.

● **Garnier, René:** Leçons d'algèbre et de géométrie à l'usage des étudiants des facultés des sciences. Tome 1. Algèbre linéaire. Homographie. Équations tangentielles. D'après la rédaction de Badrig Guëndjian. Paris: Gauthier-Villars 1935. VIII, 233 pag. Frcs. 40.—

Ein Lehrbuch hauptsächlich der projektiven Geometrie einschließlich Differentialgeometrie in durchwegs analytischer Behandlung; die algebraischen Einleitungskapitel dienen dem geometrischen Zwecke dieses breit angelegten und mit vielen Beispielen versehenen Lernbehelfs für französische Studierende. Aus dem Inhalt: I. Determinanten: systematische allgemeine Entwicklung bis zur Multiplikation zweier Determinanten und den Adjungierten. II. Auflösung linearer Gleichungen: p nichthomogene Gleichungen mit n Unbekannten, Rang, homogener Fall. III. Lineare Formen: Unabhängigkeit, lineare Substitutionen und ihr Produkt, Invarianz des Ranges eines Systems, Funktionaldeterminanten. IV. Quadratische Formen: Reduktion auf die Summe von Quadraten linearer Formen, Rang, Diskriminante, Trägheitsgesetz. V. Projektive Geometrie der Geraden, Doppelverhältnis: lineare Transformation, Doppelverhältnis, harmonischer Wurf, Projektivität in vereiniger Lage, Doppelpunkte, kanonische Formen der linearen Transformation, Involutionen, Geometrie der binären quadratischen Formen. VI. Projektive Geometrie der Ebene und des Raumes: homogene und projektive Koordinaten, Punktreihe, Strahlbüschel, Ebenenbüschel, Dualität, Doppelverhältnis beliebiger Elementwürfe, Berührungskorrelation. Lineare Transformationen in zwei- und dreidimensionalen Räumen, Invarianten, Gruppen, Doppelpunkte, Affinitäten, projektive und affine Klassifikation der Kurven und Flächen zweiter Ordnung. Anwendungen auf die Infinitesimalgeometrie, Berührung, Tangenten, Schmiegeebenen, Asymptotenlinien einer Fläche, alles in homogenen Koordinaten. VII. Tangentialgleichungen, Einhüllende und Extrema: singuläre Punkte von Kurven und Flächen, Gleichung von ebenen Kurven in Linienkoordinaten, von Flächen und Raumkurven in Ebenenkoordinaten, insbesondere linear, Berührungspunkt, Doppeltangenten, Übergang von Tangentialgleichungen zu Punktgleichungen, Ordnung und Klasse. Gleichungen der Kurven und Flächen zweiter Klasse, ihre Einteilung in der komplexen, reellen, projektiven und affinen Geometrie. Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren für die allgemeinste Extremalaufgabe mit Nebenbedingungen, Achsenlängen von Kurven und Flächen zweiten Grades, Achsenlängen eines Mittelpunktschnittes des Ellipsoids, Fresnelsche Wellenfläche. *Eckhart*.

Pfeiffer, F.: Die projektive Skala. *Jber. Deutsch. Math.-Vereinig.* **45**, 144—169 (1935).

Der Kleinsche Aufbau der projektiven Geometrie durch Einführung von Koordinaten auf geometrischer Grundlage (siehe F. Klein: „Zur Nicht-Euklidischen Geometrie“, *Math. Ann.* **37**, 565—570, Abschnitt III) wird ausführlich dargestellt. Im wesentlichen auf Grund des Satzes, daß das harmonische Punktquadrupel unabhängig von der speziellen Wahl des erzeugenden Vierseits ist, wird das Möbiussche Netz über

den Punkten $0, 1, \infty$ so weit abgeleitet, daß für die in der bekannten Weise konstruierte Skala der Punkte mit rationaler Abszisse der Satz bewiesen werden kann, daß bei Verlegung der Punkte $0, 1, \infty$ in 3 andere Skalenpunkte die Abszissen x der Skalenpunkte eine Transformation $\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ (α bis δ rational und mit nicht verschwindender Determinante erfahren). Durch Hinzunahme von Stetigkeitsbetrachtungen erfolgt dann die Einbettung der rationalen Zahlen in die reellen Zahlen, und der Aufbau der projektiven Geometrie kann in der bekannten Weise zu Ende geführt werden. *R. Moufang.*

Dye, L. A.: Space involutorial transformations of the Geiser and Bertini types. *Bull. Amer. Math. Soc.* **41**, 515—520 (1935).

Involutorische Raumtransformationen, bei denen die Ebenen eines Büschels einzeln in Ruhe bleiben, können dadurch erhalten werden, daß man in jeder Ebene des Büschels eine ebene involutorische Transformation etwa vom Bertinischen Typus erklärt. Bildet man dann die Ebenen des Büschels auf die Flächen 3. Ordnung eines Büschels ab und sorgt dafür, daß die Grundpunkte der Bertinischen Verwandtschaften in ihrer Lage zur Achse des Ebenenbüschels geeignet gewählt und dann in geeigneter Weise transformiert werden, so erhält man verschiedene Typen allgemeinerer involutorischer Raumtransformationen, die von F. R. Sharpe und L. A. Dye (dies. Zbl. **9**, 179) untersucht worden sind. In der vorliegenden Abhandlung handelt es sich um eine Verallgemeinerung dieser Untersuchungen. In den Ebenen eines Büschels werden einmal Geisersche und dann Bertinische Verwandtschaften erklärt, und zwar so, daß im Falle der Geiserschen Verwandtschaft einer der Fundamentalpunkte, im Falle der Bertinischen Verwandtschaft zwei Fundamentalpunkte mit dem Büschelparаметer auf der Achse $x_3 = 0, x_4 = 0$ des Ebenenbüschels variieren. Die Ebenen des Büschels werden dann durch eine Verwandtschaft mit der Matrix:

$$\begin{vmatrix} (a_1; x_i) & (a_2; x_i) & (a_3; x_i) & (a_4; x_i) \end{vmatrix} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

(d. h. die Koordinaten des transformierten Punktes sind den aus dieser Matrix mit den drei Reihen a, b, c gebildeten dreireihigen Determinanten proportional) auf Flächen 3. Ordnung abgebildet. Wählt man nun die Transformationskoeffizienten vom Büschelparаметer λ abhängig, indem man a_{ik}, b_{ik}, c_{ik} Polynomen n -ten Grades in λ gleichsetzt und setzt man schließlich noch $\lambda = x_4 : x_3$, so treten an Stelle der Flächen 3. Ordnung Flächen $(3n+3)$ -ter Ordnung und es entsteht im Falle der Geiserschen Verwandtschaft eine involutorische Raumtransformation I_{24n+19} , im Falle der Bertinischen Verwandtschaft eine $I_{120n+51}$. Für diese beiden komplizierten Transformationen werden die Charakteristiken angegeben. *E. A. Weiss (Bonn).*

Cassina, U.: Sulla costruzione del piano osculatore ad una quartica di prima specie. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **21**, 681—682 (1935).

Voranzeige eines ausführlichen Aufsatzes über eine lineare Konstruktion der Schmiegeebene in einem Punkt einer Raumkurve vierter Ordnung erster Art, der nächsten in *Rend. Ist. Lomb.* (2) **68** (1935) erscheinen wird. *Kruppa (Wien).*

Varga, O.: Integralgeometrie 3. Croftons Formeln für den Raum. *Math. Z.* **40**, 387—405 (1935).

Als Croftonsche Formeln werden Relationen bezeichnet, die das Produkt der Dichten (vgl. z. B. dies. Zbl. **12**, 34, Blaschke) von gleich- oder verschiedenartigen Elementen (Punkten, Geraden, Ebenen) in Beziehung zu den Dichten von solchen Elementen setzen, die mit den Ausgangselementen bewegungsinvariant verknüpft sind. Als Beispiele seien genannt: Das Produkt der Dichten eines Punktes P und einer Geraden G ist gleich dem Abstand von P und G , multipliziert mit der Dichte der Verbindungsebene E und mit den Dichten von P und G , aufgefaßt als Elemente der Ebene E . Ferner: Das Produkt der Dichten dreier Punkte P_1, P_2, P_3 , also die Dichte eines Punktetripels ist gleich dem doppelten Flächeninhalt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$, multipliziert mit der Dichte der Verbindungsebene E und den Dichten von P_1, P_2 und P_3 in E . Durch Integration solcher Dichterelationen über die Punkte eines kon-

vexen Körpers bzw. die Geraden oder Ebenen, die einen konvexen Körper treffen, werden Beziehungen zwischen Integralinvarianten von konvexen Körpern gewonnen, die Formeln von Crofton für die Ebene analog sind. Einige der Ergebnisse des Verf. sind in einer unpublizierten Vorlesung von Herglotz (1933) und, wie der Verf. wohl übersehen hat, schon von Hostinský [Publ. Fac. Sci. Univ. Masaryk 50 (1925)] hergeleitet worden.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Gerieke, H.: Einige kennzeichnende Eigenschaften des Kreises. Math. Z. 40, 417—420 (1935).

Eine konvexe Kurve, die mit jeder kongruenten zusammenfällt, mit der sie wenigstens drei nicht auf einer Geraden gelegene Punkte (drei nicht durch einen Punkt gehende Stützgeraden) gemeinsam hat, ist ein Kreis. Diese beiden zum Teil auf Fujiwara zurückgehenden, in dieser Form von Hombu [Tôhoku Math. J. 33, 72—77 (1930)] bewiesenen Sätze werden mit Hilfe der Bemerkung, daß zwei sich schneidende konvexe Kurven *cum grano salis* ebenso viele gemeinsame Punkte wie gemeinsame Stützgeraden besitzen (vgl. hierzu auch Segre, dies. Zbl. 11, 130), als äquivalent erwiesen. Sodann wird der erste Satz äußerst einfach direkt hergeleitet. Ferner wird für einen den Kreis kennzeichnenden Satz von Salkowski (dies. Zbl. 10, 77) ein sehr kurzer Beweis angegeben.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Algebraische Geometrie:

Woude, W. van der: Über den Noetherschen Fundamentalsatz. Math. Ann. 111, 425—431 (1935).

Démonstration du théorème de Noether $Af + B\varphi$ dans le cas où les deux courbes de base $f = 0$, $\varphi = 0$ n'ont en leurs points d'intersection aucune tangente commune. La méthode employée est une variante assez simple de celle qui consiste à faire intervenir le résultant des polynômes f et φ et qui a été indiquée par Noether lui-même [Math. Ann. 40, 140—144 (1892)].

P. Dubreil (Nancy).

Waerden, B. L. van der: Zur algebraischen Geometrie. VII. Ein neuer Beweis des Restsatzes. Math. Ann. 111, 432—437 (1935).

Par la même méthode que dans le travail analysé ci-dessus, M. van der Waerden revient sur le cas, important pour le théorème du Reste, où l'une des courbes de base, $f = 0$, n'admet que des points singuliers à tangentes distinctes. Le théorème de Noether s'exprime alors simplement par des conditions nécessaires et suffisantes ne faisant intervenir que des multiplicités d'intersection, ainsi que l'Auteur l'a montré dans une communication antérieure [Math. Ann. 104, 472—475 (1931); ce Zbl. 1, 162]. Cette proposition, signale M. van der Waerden, est d'ailleurs équivalente au „Satz vom Doppelpunktsdivisor“ de la théorie arithmétique des fonctions algébriques (v. p. ex. Hensel und Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, p. 430, 1902). (VI. voir ce Zbl. 9, 226.)

P. Dubreil (Nancy).

Helms, Alfred: Ein Beitrag zur algebraischen Geometrie. Math. Ann. 111, 438 bis 458 (1935).

1. Einige Sätze von Grell (Math. Ann. 97, 524—558) und Weber (Math. Z. 36, 137—157) über die Normen von umkehrbaren Idealen in endlichen algebr. Zahlringen und abstrakten Ringen ähnlicher Bauart werden in vereinfachter Weise bewiesen mit Hilfe des folgenden Satzes: Ist T ein beliebiger Integritätsbereich mit nur endlich vielen, zueinander teilerfremden Primidealen p_1, \dots, p_n , so ist jedes umkehrbare Ideal b aus T ($b \cdot b^{-1} = T$) Hauptideal. Als Anwendung eines dieser Sätze, des Grellschen Kompositionsreihensatzes, wird gezeigt, daß die idealtheoretische Schnittmultiplizität eines Schnittpunktes einer Kurve C mit einer Hyperfläche $f = 0$ des Raumes R_n mit der funktionentheoretisch definierten Schnittmultiplizität (der Summe der Ordnungen der Nullstellen der Funktion f auf den Zweigen der Kurve) übereinstimmt. 2. Die Übereinstimmung zweier Definitionen des Begriffs des singulären Punktes einer Kurve C wird gezeigt. 3. Ist T eine Ordnung eines algebr. Funk-

tionenkörpers in einer Veränderlichen, \bar{T} die Hauptordnung, so läßt sich \bar{T} aus T durch Adjunktion eines Elementes \bar{A} erzeugen. Geometrische Anwendung: Jede Kurve C des affinen R_n ist Projektion einer singularitätenfreien Kurve eines R_{n+1} .
van der Waerden (Leipzig).

Maxwell, Edwin A.: Note on the formula for the number of quadrisecants of a curve in space of three dimensions. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 324—326 (1935).

The author determines by synthetic methods the number of quadrisecant lines of the curves which are the complete intersections of a nodal cubic surface with a surface of order n having a conical point of multiplicity s at the node. The results, when properly interpreted, agree with the general formula obtained by Welchman [Proc. Cambridge Philos. Soc. **28**, 206—208 (1932); this Zbl. **4**, 222] for the number of quadrisecants of a space curve possessing an isolated multiple point with distinct tangents.
J. A. Todd (Manchester).

Frith, Ronald: On the bicanonical sets of a certain class of curves. Proc. Cambridge Philos. Soc. **31**, 327—334 (1935).

The curves considered by the author are the curves of order n and genus p , where $n \leq 3p - 4$, which are normal in S_{n-p} . The author considers the problem of determining a set K of points of the curve C which, taken together with a hyperplane section of C make up a bicanonical set. The following results are obtained. If C is not hyperelliptic it possesses ∞^{3p-n-4} spaces S_{p-3} meeting it in $p-1$ points. These S_{p-3} can be arranged in sets, each set consisting of $\binom{k}{k-p+1}$ spaces, where $k = 4p - 4 - n$. The spaces of any one set may be represented by the symbols $(a_1, a_2, \dots, a_{k-p+1})$, where $a_1, a_2, \dots, a_{k-p+1}$ are distinct integers $\leq k$; and two S_{p-3} whose symbols have no integer in common lie in a hyperplane. The hyperplanes so obtained from all pairs of symbols such that neither contains a given integer i meet in a point of C , and the set of k points so obtained as i ranges from 1 to k form a set K which has the required property. If C is hyperelliptic a hyperplane can be drawn to pass through $\frac{1}{2}(n-k)$ sets of its g_2^1 , and this meets C again in k points. These points are the residuals, with regard to the g_2^1 , of k other points which form a suitable set K .
J. A. Todd.

Room, T. G.: Notes on determinantal manifolds. III. The genera of curves and surfaces represented by the vanishing of minors of highest order and of order two in a matrix of linear forms. J. London Math. Soc. **10**, 175—180 (1935).

Fortsetzung früherer Abhandlungen (vgl. dies. Zbl. **8**, 194 u. **10**, 416). $F(h, k)$ [oder $c(h, k)$] ist hier die Fläche [die Kurve] in einem Raume S_{k-h+3} [S_{k-h+2}], die alle $(h+1)$ -reihigen Unterdeterminanten einer Matrix mit $h+1$ Spalten und $k+1$ Zeilen verschwinden läßt; $\Phi(l, m)$ und $\gamma(l, m)$ sind analog die Fläche eines S_{l+m+2} bzw. die Kurve eines S_{l+m+1} , die alle Unterdeterminanten 2. Ordnung einer Matrix mit $l+1$ Spalten und $m+1$ Zeilen verschwinden lassen. Es werden ausgerechnet und in einer Tabelle zusammengefaßt: die Ordnungen und die verschiedenen Klassen von F, Φ, c, γ ; die Geschlechter von c, γ ; die arithmetischen Geschlechter und die Invarianten I von F, Φ . Dies geschieht durch rekurrierende Formeln, die aus der Betrachtung von geeignet zerfallenden c und F entstehen. Anwendung auf die $F(k-1, k)$ des Raumes S_4 .
E. G. Togliatti (Genova).

Todd, J. A.: Algebraic correspondences between algebraic varieties. Ann. of Math., II. s. **36**, 325—335 (1935).

Sätze von Albanese über das Verhalten der Picardschen Integrale und der linearen Zyklen einer algebr. Fläche bei mehrdeutigen Abbildungen werden auf Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension übertragen. Ist T eine irreduz. (α, β) -Korrespondenz zwischen zwei Mannigf. V_1, V_2 und sind γ_i die linearen Basiszyklen von V_1 und δ_j die von V_2 , so hat man

$$T(\gamma_i) = \sum A_{ij} \delta_j, \quad T^{-1}(\delta_j) = \sum B_{ji} \gamma_i.$$

Sind weiter u_r, v_s die einfachen Integrale 1. Gattung auf V_1 bzw. V_2 und ω_{ri} bzw. τ_{sj} ihre Perioden über γ_i bzw. δ_j , und sind P_1, \dots, P_β die Punkte von V_2 , die einem Punkte P von V_1 entsprechen, so ist $v_i(P_1) + \dots + v_i(P_\beta)$ ein Integral 1. Gattung auf V_1 , also gleich $\sum a_{ir} u_r$. Entsprechend wird die Matrix $b = (b_{is})$ definiert. Dann gelten die Matrixgleichungen $\tau A' = a\omega, \omega B' = b\tau$. (1)

Mit Hilfe der Theorie der Riemannschen Matrizes wird nun gezeigt, daß a und b denselben Rang ν und A und B den Rang 2ν haben und daß die erste Relation (1) durch passende Wahl der Basen auf die Form

$$\begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I(2\nu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I(\nu) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix}$$

gebracht werden kann, wo $I(\nu)$ die ν -reihige Einheitsmatrix bedeutet. Daraus liest man die Ergebnisse von Albanese ab. — Ist $\nu = 0$, also A, B, a und B gleich Null, so heißt T eine Korrespondenz von der Valenz Null. Ist $V_1 = V_2$ und $A = -\gamma I$, so heißt T nach Severi von der Valenz γ . Für solche Korrespondenzen gilt nach Severi eine Fixpunktsformel von der Gestalt $N = \alpha + \beta + \delta - \gamma(I+1)$, welche hier aus der Lefschetzschen topologischen Fixpunktsformel hergeleitet wird.

van der Waerden (Leipzig).

Todd, J. A.: The figure formed by six lines in space with a common transversal. J. London Math. Soc. 10, 194—199 (1935).

Es seien $l_1 l_2 \dots l_6$ sechs Geraden eines Raumes S_3 die eine gemeinsame Treffgerade zulassen. Die Flächen 4. Ordnung die l_i, l enthalten, liefern die Darstellung auf S_3 einer V_3^6 des Raumes S_5 . V_3^6 enthält eine Doppelgerade, 16 Doppelpunkte (ein Doppelpunkt P hat als Bild die einzige kubische Raumkurve, für die die Geraden l_i Sehnen sind, die übrigen 15 Doppelpunkte haben als Bilder die von l verschiedenen Treffgeraden von 4 der 6 Geraden l_i) und ist die Schnitt- V_3 einer Quadrik und einer kubischen Form; eine geeignete Cremonasche Verwandtschaft des Raumes S_3 verwandelt die ursprünglichen F^4 in Flächen 4. Ordnung, die eine Gerade und 6 gemeinsame Doppelpunkte besitzen; zwei Darstellungen der V_3^6 auf Doppel- S_3 werden einfach abgeleitet. Die Projektion der V_3^6 von P aus ist eine V_3^4 des Raumes S_4 ; diese enthält: 6 Ebenen, 15 Doppelpunkte, die die Schnittpunkte jener Ebenen sind, und eine Doppelgerade, die die 6 Ebenen trifft (hier werden einige Ergebnisse von L. Roth vervollständigt; vgl. dies. Zbl. 7, 32). Schließlich ein geometrischer Beweis des folgenden Satzes von J. H. Grace: 5 der 6 Geraden l_i bestimmen eine Doppelsechse; die 6 Geraden, die die 6 so gewonnenen Doppelsechsen vervollständigen, besitzen eine gemeinsame Treffgerade.

E. G. Togliatti (Genova).

Amin, A. Y.: The harmonic envelope of the normal rational quartic surface in four dimensions. J. London Math. Soc. 10, 200—203 (1935).

Verf. betrachtet in einem Raume S_4 die Enveloppen der S_3 , deren Schnittkurven mit der Schnittfläche F von 2 Quadriken harmonisch oder äquianharmonisch sind. Es handelt sich um zwei Enveloppen der 6. und der 4. Klasse. Die dualen V_3^6 und V_3^4 werden einer besonderen (1, 16)-Transformation unterworfen; die neuen V_3 , die man so erhält, sind die Sehnen- V_3 einer rationalen normalen C^4 und die Fundamentalquadrik der Cliffordschen Polarität, die jene C^4 definiert. Die benutzte Transformation wird von einem geeigneten ∞^4 Linearsystem von Quadriken definiert; gewissen fünf linear unabhängigen Quadriken des Systems werden fünf oskulierende Hyperbenen der C^4 zugeordnet. Weitere Eigenschaften werden leicht abgeleitet: z. B. besitzt V_3^6 16 Doppelkegelschnitte und unendlich viele Berührungsquadriken.

E. G. Togliatti (Genova).

Morton, V. C., and Dorothy S. Meyler: Desmic tetrahedra associated with a cubic surface. J. London Math. Soc. 10, 203—209 (1935).

Fortsetzung früherer Untersuchungen über die Konfigurationen, die mit einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung F^3 verbunden sind (vgl. dies. Zbl. 9, 34). Der Fläche F^3

wird hier eine andere Fläche 3. Ordnung G zur Seite gestellt; sie hat die Gleichung $L_1 T_1 + L_2 T_2 + L_3 T_3 = 0$, wobei $T_i = 0$ die drei Schurschen Quadriken von drei assoziierten Triederpaaren sind, und $L_i = 0$ drei Ebenen (eines Büschels) bedeuten, die aus den 27 Geraden der F^3 hergeleitet werden. Und es wird bewiesen, daß die desmischen Tetraeder und Flächen 4. Ordnung, die aus F^3 in den oben zitierten Arbeiten entstanden sind, mit den desmischen Tetraedern und F^4 zusammenfallen, die mit G nach einem bekannten Verfahren von L. Cremona und G. Humbert verbunden sind.

E. G. Togliatti (Genova).

Ciani, E.: Sopra un fascio sizigetico di superficie cubiche. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. **21**, 631—637 (1935).

Fortsetzung der Note I (dies. Zbl. **11**, 415). Der Verf. untersucht das von ihm gefundene räumliche Analogon zum syzygetischen Büschel ebener Kurven 3. Ordnung weiter, indem er die mit den F^3 des Büschels verbundenen Pentaeder aufsucht und die Hessesche Fläche der allgemeinen F^3 berechnet. Jede Fläche des Büschels bleibt bei allen Permutationen der vier homogenen Koordinaten invariant. Die Gruppe G_{24} dieser Permutationen wird auf ihre periodischen Transformationen hin untersucht. Es zeigt sich ferner, daß das Büschel 3 irreduzible Diagonalfächen von Clebsch enthält und drei „äquianharmonische F^3 “, nämlich solche, deren Hessesche Fläche ein Tetraeder wird. Für $\lambda = \infty$ ergibt sich eine zur Steinerschen Fläche duale F^3 , für $\lambda = 1:2$ eine F^3 , in bezug auf welche der Einheitspunkt die doppelt-gezählte Einheitsebene als Polar- F^2 besitzt. Die Basiskurve des Büschels zerfällt in drei Geraden und eine irreduzible Raumkurve 6. Ordnung. Zum Schluß wird darauf hingewiesen, daß die behandelte Flächengleichung ein Spezialfall der von A. Emch [Amer. J. Math. **53** (1931); dies. Zbl. **3**, 23] angegebenen ist. *E. A. Weiss* (Bonn).

Gussenhoven, Lila: Les surfaces rationnelles réglées du quatrième ordre, considérées comme projections d'une surface du quatrième ordre située dans un espace à cinq dimensions. Mathesis **49**, 217—221 (1935).

Campedelli, Luigi: Intorno alle superficie ellittiche con un fascio di curve di genere due. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **6**, 57—110 (1935).

Dans ce Mémoire qui se rattache à la théorie des surfaces elliptiques [voir notamment F. Enriques, Sulla classificazione delle superficie algebriche particolarmente di genere zero. Rend. Semin. mat. Univ. Roma, III **1**, parte II, 7—90 (1934); ce Zbl. **10**, 219], l'Auteur effectue la classification des surfaces F de genres $p_g = 0$, $p_a = -1$ possédant un faisceau elliptique (K) de courbes de genre $\pi = 2$. Il obtient dix familles de telles surfaces, en utilisant différentes méthodes, indépendantes les unes des autres, et dont le principe est indiqué dans l'Introduction du Mémoire.

P. Dubreil (Nancy).

Godeaux, Lucien: Sur certaines involutions appartenant à une surface algébrique. An. Fac. Ci. Pôrto **19**, 243—251 (1935).

L'Auteur considère l'homographie H définie par $x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : \varepsilon x_3 : \varepsilon^{p-1} x_4$ où p est un nombre premier et ε une racine p -ème de l'unité, et la surface F la plus générale d'ordre $p+2$ ayant des points simples en O_3 et O_4 et transformée en elle-même par H . H engendre sur F une involution I_p ayant comme points unis parfaits O_3 et O_4 et comme points unis non parfaits les $p+2$ points de rencontre de F avec $O_1 O_2$. Si Φ est une surface image de cette involution, les points unis non parfaits de I_p donnent naissance à des points doubles biplanaires de Φ , ces points ayant une suite de $\frac{p-3}{2}$ points doubles biplanaires infiniment voisins successifs, dont le dernier est ordinaire.

P. Dubreil (Nancy).

Ramamurti, B.: On rational normal ruled surfaces. Math. Ann. **111**, 582—586 (1935).

Mit Hilfe einer rationalen normalen C^n werden die binären Formen n -ten Grades a_x^n üblicherweise auf die Punkte A eines Raumes S_n eineindeutig abgebildet. Gleichzeitig

kann man auch jede beliebige Form mit einer Punktgruppe auf C^n darstellen. Die Bildpunkte A aller Formen α_x^n , die in bezug auf irgendwelchen Punkt λ von C^n eine gegebene feste Polarform b_x^{n-1} haben, erfüllen nun, eine rationale normale Regelfläche V_2^{n-1} . Diese Konstruktion ist allgemein in dem Sinne, daß jede rationale normale V_2^{n-1} so konstruiert werden kann. Die Punkte der Form b_x^{n-1} besitzen die charakteristische Eigenschaft, daß sie die einzigen Punkte der Kurve C^n sind, deren oskulierende Hyperbenen Sekantenräume der V_2^{n-1} sind. Es ist auch leicht, alle Sekantenräume S_{r-1} der V_2^{n-1} ($r \leq n-1$) als die Verbindungs- S_{r-1} von r Punkten der Kurve C^n zu definieren, die eine zu b_x^{n-1} apolare Form α_x^r bilden. Schließlich werden die bekannten Sätze von C. Segre über die Leitkurven niedrigster Ordnung der V_2^{n-1} wieder erhalten. Besondere Fälle mit $n = 3, 4$. *E. G. Togliatti* (Genova).

Black, Amos: Further non-involutorial Cremona space transformations contained in a special linear complex. *Bull. Amer. Math. Soc.* 41, 508—514 (1935).

Edge, W. L.: The problem of the in-and-circumscribed polygon for a plane quartic curve. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, II. s. 4, 121—137 (1935).

Als Anwendung der Formel $z = \alpha + \beta + 2\gamma p$, die die Anzahl z der Doppelpunkte einer (α, β) -Korrespondenz mit der Wertigkeit γ auf einer Kurve des Geschlechtes p liefert, bestimmt Verf. die Anzahl der m -seitigen Polygone ($4 \leq m \leq 10$), die einer ebenen C^4 ein- und umgeschrieben sind. Es wird vorausgesetzt, daß C^4 mit nur gewöhnlichen Plückerschen Singularitäten versehen ist. Die zu benutzenden Korrespondenzen sind einleuchtend. Die Bestimmung ihrer Wertigkeiten wird auf eine Rekursionsformel gegründet, die Verf. in einer früheren Arbeit bewiesen hat (vgl. dies. Zbl. 8, 27). Es werden die uneigentlichen Lösungen diskutiert und ausgeschlossen, die sowohl aus den Singularitäten der C^4 als auch aus n -Polygonen der gewünschten Art mit $n < m$ entstehen. Die Ergebnisse werden tabellarisch zusammengefaßt; in der Tabelle, wie in der ganzen Arbeit, bedeuten $X = y + 4$ die Klasse der C^4 und x die Anzahl ihrer Spitzen.

E. G. Togliatti (Genova).

Richmond, H. W.: On the tritangent planes of a quadri-cubic space curve. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, II. s. 4, 159—169 (1935).

Eine besondere Gleichungsform für die Schnitt- C^6 einer Quadrik und einer Fläche 3. Ordnung wird hier angegeben. Wenn Q eine beliebige Berührungsquadrik der C^6 bedeutet, so gibt es bekanntlich [vgl. P. Roth, *Mh. Math. Phys.* 22, 64 (1911); W. P. Milne, *Proc. London Math. Soc.* (2) 22, 373 (1922)] eine F^3 , die die C^6 und gleichzeitig auch die kubische Raumkurve durch die 6 Berührungspunkte von Q und C^6 enthält; diese F^3 besitzt 4 Doppelpunkte; und jedes System von Berührungsquadriken führt zu einer solchen viernodalen F^3 ; deren gibt es 255. C^6 wird hier eben als Schnittkurve einer Quadrik und einer viernodalen F^3 analytisch dargestellt. Vier dreifach berührende Ebenen $\pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4$ der C^6 werden zunächst als Koordinatenebenen gewählt; bessere Formeln erhält man, wenn man den Ebenen π_i folgende homogene Gleichungen erteilt: $x + y + z + w = 0$, $x - y - z + w = 0$, $-x + y - z + w = 0$, $-x - y + z + w = 0$. Die Rechnung wird so eingerichtet, daß die drei Systeme von Berührungsquadriken, die die drei Ebenenpaare $\pi_1 \pi_2, \pi_3 \pi_4$; $\pi_1 \pi_3, \pi_4 \pi_2$; $\pi_1 \pi_4, \pi_2 \pi_3$ bzw. enthalten zu drei viernodalen F^3 führen, deren Gleichungen aus einer einzigen Gleichung 3. Grades durch einfache Buchstabenänderungen erhalten werden. Die gefundenen Gleichungen sind geeignet, verschiedene geometrische Eigenschaften der C^6 und ihrer Berührungsquadriken zu bestätigen.

E. G. Togliatti (Genova).

Thalberg, Olaf M.: Plane involutions connected with the general pencil of cubics. *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo* 1935, 1—15 (Nr 4).

Es seien $S_1 S_2 \dots S_9$ die neun Basispunkte eines allgemeinen Kurvenbüschels 3. Ordnung. Es sei γ eine (notwendig rationale) Kurve der Ordnung ν , die jede C^3 des Büschels in einem einzigen veränderlichen Punkte R schneidet. Zwei Punkte P, P' werden entsprechend genannt, wenn sie auf derselben C^3 des Büschels liegen und mit dem betreffenden Schnittpunkt R jener C^3 mit γ kollinear sind. Man erhält so in der

Ebene eine Cremonasche Involution der Klasse ν und der Ordnung $3\nu + 5$. Die verschiedenen Typen dieser Art Involutionen, die den kleinsten Werten von ν entsprechen ($\nu < 10$), werden hier diskutiert; für jeden Typus werden die Multiplizitäten der 9 Fundamentalpunkte S_i aus allgemeinen Formeln ausgerechnet. Als Anwendungen zwei Schließungsprobleme über Kurvenbüschel 3. Ordnung: Anzahl der C^3 des Büschels, für die S_α mit seinem t -ten Tangentialpunkt zusammenfällt, und Anzahl der C^3 des Büschels, für die R mit seinem t -ten Tangentialpunkt zusammenfällt.

E. G. Togliatti (Genova).

Gambier, Bertrand: *Tétraèdres inscrits dans une cubique gauche (ou une biquadratique) et circonscrits à une développable de classe 3 (ou 4) ou à une quadrique.* Bull. Soc. Math. France **63**, 56—90 (1935).

Travail divisé en 3 parties correspondant aux 3 cas examinés: 1° Cubique gauche et développable cubique: définition simple des tétraèdres cherchés, étude de leurs propriétés; 2° Cubique gauche et quadrique: l'Auteur reprend et complète l'étude faite par Duporcq [Nouv. Ann. Math. 4, 2, 66 (1902)] et trouve trois types de tétraèdres répondant à la question; 3° Biquadratique et développable de classe 4 et genre 1: l'Auteur étudie la question par deux méthodes différentes qui lui fournissent des conditions suffisantes (et non plus nécessaires et suffisantes comme dans les deux premiers cas).

P. Dubreil (Nancy).

Differentialgeometrie:

Carrus, S.: *Sur les développées successives d'une courbe gauche.* C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 465—468 (1935).

Eine Evolute einer Raumkurve werde als erste Evolute und eine Evolute einer k -ten Evolute als $(k+1)$ -te Evolute bezeichnet. Verf. berechnet induktiv Koordinaten, Bogenlänge, Krümmung und Windung der n -ten Evoluten einer Raumkurve und macht die entstehenden Formeln durch Einführung geeigneter Hilfsfunktionen „integrалlos“.

W. Fenchel (Kopenhagen).

Darmostouk, P.: *Quelques propriétés de la congruence de droites.* Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. **11**, 69—75 (1935).

Verf. untersucht die Umgebung I. Ordnung der Regelflächen eines Strahlensystems. Es gibt durch einen allgemeinen Strahl \mathfrak{A} des Systems zwei Regelflächen, die einen Punkt P von \mathfrak{A} als Kehlpunkt haben. Für zwei Punkte (Grenzpunkte) fallen diese beiden Regelflächen in eine einzige zusammen. — Gewisse, singuläre Strahlen der Kongruenz zeigen ein abweichendes Verhalten: Durch eine singuläre Gerade gehen 3 Regelflächen, die einen Punkt P der Geraden als Kehlpunkt haben. In einigen Beispielen werden die singulären Geraden des Strahlensystems bestimmt.

W. Haack (Berlin).

Poli, Louis: *Sur les propriétés infinitésimales des mouvements à deux paramètres.* Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. **26**, 187—302 (1934).

Der Verf. untersucht hier hauptsächlich die Differentialgeometrie einer Somenkongruenz M_2 , und zwar mit Hilfe von dualen Zahlen $r_a(u, v) \equiv r_a^{(1)} + \varepsilon r_a^{(2)}$, $\varepsilon^2 = 0$ ($a = 1, \dots, 4$), welche mittels

$$\sum (r_a)^2 = 1 \quad (1)$$

normalisiert werden. Für $r_1 = 0$ bekommt man wohl, laut (1), die Plueckerschen Koordinaten, so daß sich eine Analogie zwischen Geradenkongruenzen und Somenkongruenzen ausfindig machen läßt. Auf diese Weise bekommt man das duale Linienelement $I \equiv \sum (dr_a)^2 \equiv E du^2 + 2F dv du + G dv^2$. Die Simultaninvarianten der beiden darin steckenden Formen führen zu speziellen Arten von M_2 . — Nach (1) kann aber die M_2 auch als eine duale Fläche im dreidimensionalen elliptischen Raum gefaßt werden. Zum Unterschiede von der Geradengeometrie ist hier wohl I an gar keine Bedingung gebunden. Neben I führt man noch die zweite Fundamentalform

$$II = -\frac{1}{A} \left| d^2 r_a, r_a, \frac{\partial r_a}{\partial u}, \frac{\partial r_a}{\partial v} \right|$$

mit $\Delta = \sqrt{EG - F^2}$ ein. Beide Formen sind durch Gauß-Codazzische Gleichungen verknüpft, und umgekehrt bestimmen sie eine M_2 . Ausgehend von dieser Analogie zur Flächentheorie kann man die Theorie der Somenkongruenzen entwickeln (z. B. sphärische Abbildung, M_2 mit asymptotischen M_1 , usw.). Mittels Einführung von „Tangentialeukordinaten“ werden dann die früher erwähnten speziellen Somenkongruenzen untersucht und beschrieben.

Hlavatý (Praha).

Vincensini, P.: Sur certaines questions métriques liées aux congruences stratifiables. Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. s. 26, 303—319 (1934).

Après avoir rappelé les propriétés des réseaux associés (= les tangentes homologues décrivent deux couples de congruences simplement stratifiables conjuguées et harmoniques) qu'il a données récemment (ce Zbl. 6, 367; 10, 273) l'auteur examine une configuration (θ) contenant ∞ réseaux R_i orthogonaux qui sont associés à un même réseau R' . Les congruences C harmoniques à R_i et conjuguées à R' sont cycliques; les points homologues R_i sont situés sur une sphère Σ au centre au point R' de R' , orthogonale à R_i . Deux surfaces quelconques R_1, R_2 de (θ) avec deux autres α_1, α_2 composent une chaîne ($R_1, \alpha_1, \alpha_2, R_2$) telle que deux réseaux consécutifs sont transformés de Ribaucour. Si R_1, R_2 elles mêmes sont en transformation de Ribaucour, les quatre droites suivant lesquelles se coupent les plans tangents homologues de chaque couple composent un quadrilatère dont chaque arête décrit une congruence cyclique. La transformation par parallélisme de Peterson fait correspondre à (θ) une configuration semblable (θ') liée avec un réseau-point O . L'inversion au pôle O transforme les sphères Σ' en plans π qui contiennent les normales des surfaces transformées de R . *S. Finikoff (Moscou).*

Blank, J.: Flächen mit zwei konjugierten Netzen ebener Kegellinien. Commun. Soc. Math. Kharkoff et Inst. Sci. Math. et Mécan., Univ. Kharkoff, IV. s. 11, 55—68 (1935).

Trägt eine Fläche ein konjugiertes Netz zylindrischer Linien, so läßt sie sich bekanntlich als die Schiebungsfläche auffassen und ist dann ein Spezialfall der sog. Petersonschen Flächen, die ein konjugiertes Netz von Kegellinien besitzen. S. Lie hat die Aufgabe über Schiebungsflächen mit mehrfacher Erzeugung gestellt und gelöst, die der Verf. in dieser Arbeit auf die Petersonschen Flächen ausdehnt. Unter der die Allgemeinheit beschränkenden Voraussetzung der alleinigen Existenz ebener Kegellinien wird nach der bekannten differentialgeometrischen Methode der Aussonderung durch Fallunterscheidungen die Flächenbestimmung mit den möglichen Spezialfällen durchgeführt, wobei sich die einzelnen Flächentypen und ihre Gleichungen ergeben. Dabei ist besonders interessant, daß auch die tetraedral-symmetrischen Flächen herauskommen, auf denen es drei konjugierte Netze ebener Kegellinien gibt, von denen noch eine wichtige, bereits von A. Lembrechts aufgefundene Eigenschaft (Mém. Acad. Belg. 1924) ausgesagt werden kann.

Steck (München).

Su, Buchin: On a certain system of Lie quadrics. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 17, 234—239 (1935).

L'auteur complète l'étude des surfaces dont les asymptotiques de deux familles appartiennent à des complexes linéaires (ce Zbl. 11, 324) en montrant que les surfaces dont les quadriques de Lie coupent une quadrique fixe suivant des quadrilatères appartiennent à la classe citée.

S. Finikoff (Moscou).

Schouten, Jan Arnoldus, und Johannes Haantjes: Konforme Feldtheorie II; R_6 und Spinraum. Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 4, 175—189 (1935).

Ist \mathcal{R}_6 die 15gliedrige und ∞^{15} Transformationen enthaltende Gruppe der reellen Drehungen in einer R_6 mit beliebiger Signatur, die sich innerhalb der Gruppe stetig in die identische Transformation überführen lassen, und ist \mathcal{U}_4 die 15gliedrige und ∞^{30} Transformationen enthaltende Gruppe der unimodularen komplexen linearen homogenen Transformationen in einer E_4 (Gruppe der Spinvektoren), so lautet das Problem: diejenige Untergruppe \mathcal{U}'_4 von \mathcal{U}_4 zu bestimmen, die mit \mathcal{R}_6 meroedrisch isomorph ist. Es zeigt sich, daß für geraden bzw. ungeraden Index von \mathcal{R}_6 , \mathcal{U}'_4 die-

jenige Untergruppe von \mathcal{A}_4 ist, die eine hermitisch symmetrische Größe ω_{AB} bzw. eine hermitisch umkehrbare Größe Ω^A_B invariant läßt. Durch Spezialisierung lassen sich ähnliche Sätze für R_5 und R_4 ableiten. Im letzten Abschnitt wird auf die Konsequenzen für die Physik hingewiesen. — (Eine E_n ist ein n -dimensionaler Raum mit einer gewöhnlichen affinen Geometrie; eine R_n ist eine E_n mit einer krümmungslosen metrischen Geometrie.)

V. Fock (Leningrad).

Golab, Stanislas: Sur le rapport entre les notions des mesures des angles et des aires dans les espaces de Finsler. C. R. Acad. Sci., Paris **201**, 250—251 (1935).

In a Finsler space angle and area have been defined in a number of ways and this note straightens out the question of priority of these definitions and formulas. It is also shown that if ω is the area of a sector of geodesic radius ε as defined by Berwald-Funk and φ the central angle of Landsberg then $\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\omega}{\varepsilon^2}$. The same relation holds if ω is the area as defined by Golab and φ is the angle as defined by Bliss.

M. S. Knebelman (Princeton).

Topologie:

Whitney, Hassler: Differentiable manifolds in Euclidean space. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 462—464 (1935).

Zu jedem Punkt P einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit \mathcal{M}^n gebe es eine Umgebung U_P , deren Punkte in umkehrbar eindeutiger und stetiger Weise auf reelle Koordinaten x_1, \dots, x_n bezogen sind derart, daß die Koordinaten x_1, \dots, x_n und y_1, \dots, y_n zweier solcher Umgebungen U_P und U_Q in den etwa gemeinsamen Punkten durch eine r -mal stetig differenzierbare Transformation miteinander zusammenhängen, deren Funktionaldeterminante nirgends verschwindet. Alsdann heißt \mathcal{M}^n differenzierbar von der Klasse C^r . Es werden Sätze über die Einlagerung von differenzierbaren Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume und ihre Approximation durch analytische Mannigfaltigkeiten aufgestellt und ihre Beweise angedeutet. Seifert (Dresden).

Whitney, Hassler: Sphere-spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **21**, 464—468 (1935).

Voranzeige einer Arbeit über Sphärenräume, das sind $(n+k)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten, die von einer Schar von ∞^n k -dimensionalen Sphären einfach und lückenlos überdeckt werden.

H. Seifert (Dresden).

Reidemeister, Kurt: Überdeckungen von Komplexen. J. reine angew. Math. **173**, 164—173 (1935).

Es sei \mathfrak{A} ein n -dimensionaler Komplex und \mathfrak{X} eine additive Gruppe. Eine Überdeckung \mathfrak{U} von \mathfrak{A} mit der Koordinatengruppe \mathfrak{X} ist ein Komplex, dessen k -dimensionale Zellen xa^k eineindeutig durch je ein Element x von \mathfrak{X} und eine k -dimensionale Zelle a^k von \mathfrak{A} bezeichnet werden können, unter folgender Bedingung: Ist a_i^k inzident mit a_j^{k-1} , so ist jedes xa_i^k inzident mit einer Zelle $x'a_j^{k-1}$ und die Zuordnung $x\gamma = x'$ ist ein 1-Automorphismus der Gruppe \mathfrak{X} . Andere Inzidenzen soll es in \mathfrak{U} nicht geben. Die Automorphismen $\gamma = \gamma_{ij}^k$ bilden die Inzidenzmatrizes der Überdeckung. Die Bezeichnung der Zelle xa^k kann in $(x\alpha)a^k$ abgeändert werden, wobei α ein beliebiger Automorphismus von \mathfrak{X} ist. — Eine Kette ist eine Linearkombination $\sum x_i a_i^k$. Der Rand einer Kette ist wieder eine Kette. Die Ränder der $(k+1)$ -dimensionalen Ketten bilden eine Untergruppe der additiven Gruppe aller k -dimensionalen Ketten mit Rand Null; die Faktorgruppe heißt die Homologiegruppe der Überdeckung. Sie ist invariant bei Unterteilungen von \mathfrak{A} . — Ist speziell \mathfrak{X} ein Ring mit Einselement und sind die Automorphismen γ Rechtsmultiplikationen: $x\gamma = xg$, so bilden die Ketten einen \mathfrak{X} -Modul: den Kettenring. Die Zellen a_i^k bilden eine lin.-unabh. Basis für den Kettenring. Durch elementare Basistransformationen entstehen aus der Basis andere Basen, deren Berandungsrelationen zu Berandungsmatrizes r_i^k führen, deren Verhalten bei elementaren Basistransf., sowie bei Unterteilungen von \mathfrak{A} sehr einfach an-

zugeben ist. Auch ihr Verhalten bei Übergang zum dualen Komplex wird untersucht. Im Fall einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit \mathfrak{R} und eines Kreisteilungskörpers \mathfrak{K} hat die Überdeckung außer den Elementarteilern der Berandungsmatrizes noch eine Invariante A , welche mit der Klassifikation der Linsenräume (vgl. dies. Zbl. 11, 324) zusammenhängt.

van der Waerden (Leipzig).

Franz, Wolfgang: Überdeckungen topologischer Komplexe mit hyperkomplexen Systemen. J. reine angew. Math. 173, 174—184 (1935).

Die von Reidemeister (s. vorst. Ref.) definierten Überdeckungen werden für den Fall näher studiert, daß die Koordinatengruppe \mathfrak{K} eine halbeinfache Algebra oder eine Maximalordnung einer solchen ist. Die halbeinfachen Algebren lassen sich sofort auf einfache reduzieren. Im Fall einer einfachen Algebra \mathfrak{K} ist der Kettenring ein \mathfrak{K} -Modul, also direkte Summe von irreduziblen \mathfrak{K} -Moduln, die alle isomorph einem Linksideal von \mathfrak{K} sind. Dasselbe gilt für ihre Untermoduln und Restklassenmoduln, insbesondere für die Homologiegruppen. Die einzige Invariante einer Homologiegruppe ist daher ihre Länge, d. h. die Anzahl ihrer irreduziblen Bestandteile; diese ergibt sich gleich $s\alpha_k - r_{k-1} - r_k$, wo r_k der Rang der k -ten Berandungsmatrix, α_k die Anzahl der Zellen α^k und s die Länge von \mathfrak{K} ist. — Nimmt man nun für \mathfrak{K} die Hauptordnung einer einfachen Algebra über einem p -adischen Zahlkörper, so ergeben sich als einzige Invarianten eines \mathfrak{K} -Moduls ein „Rang“ und gewisse Elementarteiler. Für die Homologiegruppe findet man den „Rang“ $s_p\alpha_k - e_{k-1} - e_k$ und als Elementarteiler die der Berandungsmatrix R_k . Ist \mathfrak{K} schließlich eine Hauptordnung einer Algebra \mathfrak{A} über dem rationalen Zahlkörper, so kann man für jede Primstelle p zu einer Hauptordnung \mathfrak{o}_p einer p -adischen Algebra \mathfrak{A} übergehen und findet dann für jede Primstelle die geschilderten Invarianten.

van der Waerden (Leipzig).

Franz, Wolfgang: Über die Torsion einer Überdeckung. J. reine angew. Math. 173, 245—254 (1935).

Die von Reidemeister (J. reine angew. Math. 173; vgl. vorsteh. Referate) eingeführten Überdeckungen von Komplexen werden für den Fall näher untersucht, daß die Koordinatengruppe der Überdeckung ein Körper K ist. Man findet, daß die Berandungsmatrizes gegenüber elementaren Umformungen außer den Homologiezahlen eine einzige Invariante haben, die Torsion T . Ist speziell die Fundamentalgruppe zyklisch und die Überdeckung der „Homotopiekettenring“, dessen Koordinatengruppe der Gruppenring der Fundamentalgruppe, also eine direkte Summe von Kreiskörpern ist, so gehört zu jedem dieser Kreiskörper eine Torsion, welche eine Invariante des Komplexes selbst ist. Mit Hilfe dieser Invariante wird das Homöomorphieproblem für die von de Rham [J. Math. pures appl., IX. s. 10, 115—200 (1931); dies. Zbl. 2, 55] eingeführten „verallgemeinerten Linsenräume“ vollständig gelöst. Man stößt dabei auf die Frage der Unabhängigkeit gewisser „Kreiseinheiten“ in Kreiskörpern, welche unter anderem mit Hilfe des Satzes vom Nichtverschwinden der L -Reihen beantwortet werden kann.

van der Waerden (Leipzig).

Aitchison, Beatrice: On the mapping of locally connected continua into simple arcs. C. R. Soc. Sci. Varsovie 27, 130—146 (1935).

A real continuous function $f(x)$ defined on a set M is said [see Čech, Fundam. Math. 18, 85 (1932); this Zbl. 4, 163] to be of finite sections provided $f(x) = c$ has at most a finite number of solutions in M for every real number c . Let P denote the property of a set M to admit such a function of finite sections to be defined on it. In this paper sufficient conditions are obtained in order that property P should be cyclicly extensible. More specifically, as a result of a number of more inclusive lemmas, it is shown that if every cyclic element C of a locally connected continuum H admits a function of finite sections which transforms the cut points on C into a reducible set and if (a) the end points of H are countable and (b) the set of branch elements of H is reducible under the operation of bilateral coherence (a notion defined herein by the authoress) then H has property P . This result achieves a considerable ex-

tension of a theorem of Mazurkiewicz [Fundam. Math. 18, 88 (1932); this Zbl. 4, 163] which is applicable to the case of a dendrite. G. T. Whyburn (Virginia).

Mechanik.

Strömgren, Elis: Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps. Bull. Astron., II. s. 9, 87—130 (1934).

Der Artikel ist ein systematischer Bericht über die Ergebnisse der langjährigen numerischen Rechnungen an der Kopenhagener Sternwarte. Kürzere Berichte dieser Art hat der Verf. 1923 in der Festschrift der Kopenhagener Universität, 1925 in den Ergebn. d. exakten Naturwiss. veröffentlicht. Der vorliegende Bericht ist ausführlicher in der Darstellung auch der älteren Kopenhagener periodischen Bahngruppen, berücksichtigt alle bisher veröffentlichten Resultate und enthält auch manches Neue, vor allem im Zusammenhang mit dem Kombinationsprinzip des Verf. Der Bericht schreitet von Gruppe zu Gruppe fort, bespricht den jeweiligen Anfang und Abschluß und illustriert den dazwischenliegenden Entwicklungsgang mit vielen Figuren. Ein Bindeglied zwischen manchen der Gruppen ergibt sich aus einer Untersuchung von asymptotischen Bahnen. Dem Bericht, der eine ausgezeichnete Einführung in den Gegenstand bildet, ist eine vollständige Bibliographie der Kopenhagener Untersuchungen über das Dreikörperproblem beigelegt.

Wintner (Baltimore).

Sokoloff, G.: Sur le choc dans le problème restreint des trois corps qui s'attirent (ou se repoussent) mutuellement proportionnellement à leurs masses et à une fonction de la distance. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 3/4, 133—153 u. franz. Zusammenfassung 154—155 (1935) [Ukrainisch].

Verf. untersucht Bahnkurven mit Zusammenstößen eines Massenpunktes, der der Wirkung zweier Gravitationszentra unterworfen ist; jedes Zentrum wirkt nach dem Gesetz $g^2 mm' f(a)$; $g^2 mm' = \text{konst.}$, a Abstand, $f(a)$ holomorph in a , $\lim_{x \rightarrow +0} x^{2a+1} f(x) = 2a$ ($a > 0$). Es werden die Eigenschaften der Bewegungen untersucht und ein direkter Beweis der Existenz von Bahnkurven mit Zusammenstößen gegeben. Speziell wird das entartete Dreikörperproblem behandelt.

A. Andronoff, A. Witt (Moskan).

Uno, Tosio: Sur les singularités des équations différentielles dans le problème des trois corps. Ann. Mat. pura appl., IV. s. 14, 111—137 (1935).

Der Verf. studiert die lokalen Vorkommnisse bei einer zur Zeit $t = 0$ stattfindenden Singularität eines Dreikörperproblems mit komplexen Anfangsbedingungen, so daß ein „Stoß“ nicht das Zusammenfallen mindestens zweier Körper bedeutet. Dementsprechend verlieren die meisten Sätze der klassischen Theorie ihre Gültigkeit. Die Resultate werden an Hand von integrierbaren Grenzfällen illustriert.

Wintner (Baltimore).

Birkhoff, George D.: Sur le problème restreint des trois corps. (I. mém.) Ann. Scuola norm. super. Pisa, II. s. 4, 267—306 (1935).

Die Abhandlung ist der erste Teil einer aus drei Teilen bestehenden Arbeit, die das ganze Gebiet des restringierten Dreikörperproblems umfassen wird. Der zweite Teil wird sich mit qualitativen Fragen beschäftigen, der dritte mit Fragen im großen (Anwendungen der neueren Variationsrechnung, Ergodensatz, Abschlußprinzip), während der vorliegende Teil die analytischen Grundlagen bringt und eine wesentliche Weiterführung der Resultate der in Bd. 39 (1915) der Rend. Circ. mat. Palermo erschienenen grundlegenden Arbeit des Verf. enthält. Betrachtet wird ein isoenergetischer Phasenraum, der dem Innern der ursprünglichen Hillschen Nullgeschwindigkeitskurve entspricht, also ein Gebiet, das die Mond- und die meisten Planetenbahnen enthält. Die Singularität dieses Phasenraums wird nach Thiele-Burrau und Levi-Civita regularisiert. Während aber a. a. O. die Diskussion des Phasenraumes, der Stromlinien, der Flächentransformation der Schnittflächen (surfaces of section) usw.

meist nur so weit geführt worden ist, wie es für die Zwecke der dort gegebenen topologischen Existenzbeweise für periodische Bahnen nötig war, werden jetzt, zuerst für $\mu = 0$ ($\mu =$ Massenprozentatz) und dann im gestörten Fall, alle diese Dinge rechnerisch weiterverfolgt. Dies liefert viele neue Resultate, vor allem weil die gefundenen Reihen die für Existenzfragen wichtige Größenordnung der entwickelten Größen explizit angeben. Auch wird dabei bewiesen, daß die Flächentransformation durchweg (mit Einschluß der Ränder) regulär-analytisch ist. Entsprechende Regularitätsbeweise werden auch für die Randfläche selber und für die übrigen Daten gegeben, auch was ihre Abhängigkeit von μ anlangt. Einigen der Entwicklungen liegen passend gewählte neue Normalkoordinaten zugrunde. In diesen wird eine analytische Darstellung der Flächentransformation und ihrer Iterierten gewonnen. Diese Ergebnisse werden in dem Schlußparagraphen angewandt auf die Frage nach der Gesamtheit aller periodischen Lösungen, die bei kleinem μ sich aus zu $\mu = 0$ gehörigen Lösungen durch das Poincarésche Störungsprinzip ergeben. Die Entwicklung der Iterierten der Flächentransformation liefert zunächst die von Poincaré postulierten, a. a. O. vom Verf. ohne Benutzung seines „letzten Poincaréschen Satzes“ sichergestellten symmetrischen periodischen Lösungen, also die Poincaréschen „Sorten“. Damit ist aber noch nicht alles erledigt. Denn die Entwicklung der Flächentransformation ergibt eine notwendige und hinreichende Bedingungsgleichung für jede aus einer Keplerschen entstandene periodische Lösung, und Überslagsbetrachtungen legen es nahe, daß diese Bedingungsgleichungen wohl nicht nur durch die symmetrischen Sortenlösungen erfüllt sind. Die endgültige Beantwortung der Frage würde eine rechnerische Diskussion dieser analytischen Bedingungsgleichungen für die kritischen Punkte der Iterierten („Verzweigungsgleichungen“) erfordern. *Wintner.*

Grave, D. O.: Die Axoiden der Bewegung eines starren Körpers. J. Inst. Math. Acad. Sci. Ukraine Nr 1, 3—9 u. dtsch. Zusammenfassung 9 (1934) [Ukrainisch].

Es werden einige Spezialfälle der Bewegung eines starren Körpers mit abwickelbarer Axoide betrachtet. *A. Andronoff, A. Witt* (Moskau).

Synge, J. L.: Mechanical models of spaces with positive-definite line-element. Ann. of Math., II. s. 36, 650—656 (1935).

Indem der Verf. die kinetische Energie eines gewöhnlichen dynamischen Systems als die metrische Fundamentalform eines Riemannschen Raumes auffaßt, erhält er mechanische Interpretationen für die Orthogonalität zweier infinitesimaler Verschiebungen oder Drehungen u. dgl. m. in diesem Raum. Die Topologie des Raumes wird für einige passend gewählte dynamische Systeme, z. B. für den Fall eines sphärischen Pendels, bestimmt. *Wintner* (Baltimore).

Husson, Ed.: Les solutions, mouvements ou trajectoires stationnaires en mécanique. Bull. math. Fac. Sci. et grandes Écoles 1, 257—271 (1935).

Fialkow, Aaron: Trajectories and lines of force. Trans. Amer. Math. Soc. 38, 89 to 105 (1935).

The paper deals with the motion of a particle in a plane. Let the particle start from rest at the origin and let the x -axis be chosen tangent to the line of force there. Let $y = g(x)$ be the equation of the trajectory and $y = h(x)$ that of the line of force. The particle starts to move in the direction of the line of force: the author defines the ratio set as the limits of the ratio of the departures of the line of force and the trajectory from the common tangent, i.e. the limits of h/g as $x \rightarrow 0$. He proves that the ratio set is identical with the limits of the expression $2xg'/g - 1$, or of the equivalent expression $2hx^{-1/2} \int_0^x h x^{-3/2} dx$, as $x \rightarrow 0$. Thus the ratio set is determined

when either the trajectory or the line of force is known. — Generalizing a result due to Kasner for the case where α is an integer, he shows that if the line of force has contact of any order α (rational or irrational) with the tangent, then the trajectory

will also have contact of order α with the tangent and the ratio set will be $2\alpha + 1$. If the line of force has contact of infinite order, the trajectory also will have contact of infinite order and the ratio set will be $+\infty$ or all numbers in some non-negative closed interval including $+\infty$. — When no ordinary order of contact exists, the author defines a generalized order of contact α of a curve touching the x -axis at the origin as the upper bound of all numbers k such that $\lim_{x \rightarrow +0} (y/x^{k+1}) = 0$. If the line of force

has generalized contact of order α , the trajectory will have generalized contact $\geq \alpha$ and the ratio set will be a non-negative closed interval containing at least one of the numbers $2\alpha + 1$, $+\infty$. This interval may degenerate to a point. — The case of motion in a resisting medium and the case where the particle has an initial velocity in the direction of the line of force are also discussed. In the latter case the order of contact of the trajectory with the tangent exceeds by unity that of the line of force.

J. L. Synge (Toronto).

Andronov, A., and A. Lubina: Application of Poincaré's theory of bifurcation points and exchanges of stability to simple autooscillating systems. *Z. eksper. teoret. Fis.* 5, 296—309 (1935) [Russisch].

In the present note a connection is established between the theory of dependence of stationary states of an autooscillating cathode generator on the parameter and the theory of dependence of equilibrium states of a conservative system on the parameter as given by Poincaré in his studies of the equilibrium of a rotating fluid mass.

Autoreferat.

García, Godofredo: Über die komplizierte Äquipotentialfläche, die einen Körper umhüllt, der aus flüssiger Materie besteht. *C. R. Soc. Sci. Varsovie* 27, 120—127 (1935) [Spanisch].

Der Verf. leitet die von Wronski (1821) angegebenen elementaren Bedingungen für eine von Wronski definierte Art von Gleichgewicht ab. Es werden sodann im Anschluß an Bruns die mittlere und die Gaußsche Krümmung in einem Punkte der Flüssigkeitsoberfläche durch Ableitungen der Beschleunigung ausgedrückt und verschiedene analog gebaute elementare Relationen für Winkelbeschleunigung, lineare Dilatation u. dgl. berechnet.

Wintner (Baltimore).

Neronoff, N.: Sur la loi de l'attraction. *Ann. Mat. pura appl.*, IV. s. 14, 75—97 (1935).

The author considers the motion of a planet relative to the sun when the law of attraction differs from the Newtonian law, the mutual potential of two particles of masses M and m at a distance ϱ apart being

$$f m M \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{\lambda}{\varrho^2} + \frac{\mu}{\varrho^3} + \dots \right). \quad \text{Whittaker (Edinburgh).}$$

Astronomie und Astrophysik.

Hnatek, A.: Über die Möglichkeit des Auftretens mehrfacher Lösungen bei der Olbersschen Methode der parabolischen Bahnbestimmung in den Spezialfällen der Konjunktion und der Opposition. *Astron. Nachr.* 256, 253—258 (1935).

Bei der Bestimmung einer parabolischen Bahn aus drei geozentrischen Örtern auftretende mehrfache Lösungen werden untersucht für den Fall, daß im mittleren Ort der Komet in Konjunktion oder Opposition zur Sonne steht. Bedeuten ϱ_1, ϱ_3 die geozentrischen Distanzen im ersten und dritten Ort, N_2 die geozentrische Winkelgeschwindigkeit im mittleren Ort ($N_2 > 0$ rechtläufig, $N_2 < 0$ rückläufig), so sind mehrfache Lösungen möglich: in der Opposition (Sonne—Erde—Komet) dreifache, wenn $\varrho_1 < \varrho_3$ und $N_2 < 0$; in der oberen Konjunktion (Komet—Sonne—Erde) dreifache, wenn $\varrho_1 < \varrho_3$ und $N_2 > 0$; in der unteren Konjunktion (Sonne—Komet—Erde) zweifache, wenn $\varrho_1 = \varrho_3$ und N_2 beliebig.

Klose (Berlin).

Strömgren, Elis, und Hans Q. Rasmusen: Über die ursprüngliche Bahn des Kometen 1907 I (Giacobini). Math.-fys. Medd., Danske Vid. Sels. **13**, H. 2, 1—12 (1935).

Nach einem von E. Strömgren [Publ. Københavns Observ. Nr **19** (1914)] gegebenen Verfahren wird durch Rückwärtsrechnung (Numerische Integration der Bewegungsgleichungen) festgestellt, daß die zur Zeit der Entdeckung leicht hyperbolische Bahn des Kometen 1907 I ursprünglich, d. h. bevor der Komet in die Anziehungssphäre der großen Planeten gelangte, elliptisch gewesen ist. *Klose (Berlin).*

Koebeke, F.: Zur Berechnung der speziellen Störungen in den Elementen. Acta Astron. c **2**, 103—105 (1935).

Transformation der Differentialgleichungen der Störungen mit dem Ziel, die numerische Integration zu erleichtern. *Klose (Berlin).*

De la Villemarqué, E.: Coefficients différentiels pour correction d'orbites. Astron. Nachr. **256**, 237—244 (1935).

Formeln, Tafeln und Nomogramme für die differentielle Bahnverbesserung.

Klose (Berlin).

Luyten, W. J.: On a formula for mean parallax. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **95**, 671—673 (1935).

Referring to the paper by Smart [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **95**, 116 (1935); this Zbl. **11**, 87] where the latter gives an analytical proof of the formula for the mean parallax of stars of known proper motion and radial velocity derived by Edmondson [Astron. J. **42**, 22, 95 (1932)] the author points out that in 1925 he obtained virtually the same results in a series of papers [Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. **11**, 87, 189 (1925)].

Kyryll Ogrodnikoff (Poulkovo).

Krause, H.: Die Änderung des Hubbleschen Faktors. Astron. Nachr. **256**, 307 bis 310 (1935).

Fehlerhafte Voraussetzung. *Heckmann (Göttingen).*

Chrétien, Henri: Sur les formules de la réfraction astronomique. (58. sess., Rabat, 28.—30. III. 1934.) Assoc. Franç. Avancement Sci., 49—52 (1934).

Paul, M.: Der Rotationsmechanismus der Sonne und die Rotationsdauer des Sonnenkerns. Gerlands Beitr. Geophys. **44**, 376—398 (1935).

Verf. geht von der Vorstellung aus, daß in den äußeren Schichten der Sonne radiale Zirkulationsströme vorhanden sind. Es wird nun die Wirkung des magnetischen Felds der Sonne auf die auf- und absteigende Ionen- und Elektronenströme diskutiert, indem berücksichtigt wird, daß die aufsteigenden Ströme stärker ionisiert sind als die absteigenden. Die elektrostatische Kopplung zwischen Ionen- und Elektronenströmen wird vernachlässigt. Verf. gelangt so zu einer Deutung derjenigen Kräfte, die gegen die Reibungskräfte verschieden große Rotationszeit für Schichten in verschiedener Tiefe und verschiedener heliographischer Breite aufrechterhalten. Es wird abgeleitet, daß die Winkelgeschwindigkeit für jedes Niveau durch einen im Kosinus der heliographischen Breite quadratischen Ausdruck darstellbar ist. Indem Verf. die Konstanten dieses Ausdrucks durch Vergleich mit der Erfahrung bestimmt, gelangt er zu dem Ergebnis, daß die inneren Schichten der Sonne wesentlich langsamer rotieren als die sichtbaren. In einem zweiten Abschnitt diskutiert Verf. qualitativ die Strömungsverhältnisse in den äußersten Schichten der Sonne, ausgehend von der spekulativen Annahme, daß durch radiale Zirkulationsströme fortlaufend beträchtliche Mengen radioaktiver (transuranischer) Elemente an die Sonnenoberfläche heraufgetragen werden.

Bengt Strömgren (Kopenhagen).

Chandrasekhar, S.: Stellar configurations with degenerate cores. II. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **95**, 676—693 (1935).

In the first section of this paper the results of a previous paper [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **95**, 226 (1935); this Zbl. **11**, 86] are made more physically intelligible by the construction of the $(\log L, \log R)$ -diagram for the stellar models in question. This amounts to the construction of a Hertzsprung-Russell diagram for the models.

The paper itself must be consulted for the illuminating discussion of the results. The second section is designed to show that the main features discovered in the previous work do not depend essentially on the particular model used. The treatment is based on Jean's investigation of gaseous stellar configurations in which the parameter " $1 - \beta_1$ ", which determines the ratio of radiation pressure to total pressure, is allowed to vary through the star. Numerical results are given for comparison with those previously derived on the "standard model". The concluding section discusses the significance of the Wolf-Rayet phenomenon, the hydrogen content of certain stellar species, and of possible deviations from perfect gas laws other than deviations due to degeneracy, in relation to the general theory. W. H. McCrea (London).

Kothari, D. S.: The problems of stellar structure. Pt. I. Bull. Acad. Sci. Allahabad **3**, 129—156 (1934).

This is a summary of existing theory of stellar constitution, and chiefly of the fundamental developments due to Eddington and Milne. The main feature not included in the work of these writers is the introduction of the "effective opacity". This allows for the importance of thermal conductivity in degenerate matter, which has been previously discussed by the author [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **93**, 62 (1932); this Zbl. **6**, 133]. The paper is dated October 1933, and so the summary does not include some important work by Chandrasekhar and others published since then. W. H. McCrea (London).

Wurm, Karl: Über die Größe des selektiven Strahlungsdruckes auf die Moleküle in den Kometenschweiften. Z. Astrophys. **10**, 285—290 (1935).

Eddington, A. S.: The speed of recession of the galaxies. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **95**, 636—638 (1935).

Milne, E. A.: Stellar kinematics and the K -effect. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **95**, 560—573 (1935).

Es wird die bekannte Tatsache erörtert, daß im Sternsystem die Effekte differentieller „Rotation“ und der K -Effekt nicht allein mit der Theorie der galaktischen Rotation nach Oort und Lindblad verknüpft sind, sondern bei viel allgemeineren Verteilungen der Koordinaten und Geschwindigkeiten der Sterne als Folge der dann stets vorhandenen Scherungen und Dilatationen auftreten müssen. Heckmann.

Gyllenberg, W.: On the frequency distribution of the stars' absolute magnitudes. Lunds Univ. Årsskr., N. F. **31**, Nr 3, 1—16 (1934).

Die in einer früheren Arbeit [Meddel. Lunds astron. Observ., II. s. Nr 41a (1925)] vom Verf. entwickelte Methode, aus der Beziehung zwischen den Momenten der Verteilung der (im Winkelmaß beobachteten) Eigenbewegungen und der linearen (aus den Radialgeschwindigkeiten bekannten) Geschwindigkeiten der Sterne Mittelwert und Streuung ihrer Leuchtkräfte abzuleiten, wird auf die Momente dritter und vierter Ordnung der Leuchtkraftverteilung ausgedehnt. Die numerische Berechnung der Momente wird vereinfacht durch Gruppenbildung unter Berücksichtigung der Feldgröße. Die Anwendung auf 870 A-Sterne des Boss-Katalogs ($4,0 < m < 6,0$) ergibt so beträchtliche Werte für Schiefe und Exzeß ($S = -1,566$; $E = +1,023$), daß Momente noch höherer Ordnung hätten berücksichtigt werden müssen, für deren Berechnung aber das Material nicht ausreicht. Wempe (Göttingen).

Vessviatsky, S. K.: On some statistical relations in the systems of asteroids and comets. Russ. astron. J. **11**, 437—453 u. engl. Text 453—461 (1934) [Russisch].

The author makes a comparison of the distributions of various orbital elements of the minor planets, on the one hand, and of the comets, on the other, with the purpose of getting further insight into the possible relationship between these two classes of celestial bodies. — For the statistics in all 1223 planetoids and 49 short period comets have been used. A close similarity in the distributions of the perihelion longitudes, of the longitudes of ascending nodes and of the inclinations is clearly shown. —

These results are considered in the light of the eruption theory previously advanced by the author [Astron. Nachr. **243**, 281 (1931)] and are considered as satisfactorily confirming theoretical predictions. *Kyrill Ogrodnikoff (Poulkovo).*

Shiveshwarkar, S. W.: On the direction of star-streaming in the galaxy. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **95**, 655—663 (1935).

Using the fundamental equation of stellar dynamics $Df/Dt = 0$ for the distribution function of stellar velocities f , the author derives an expression for the angle ψ between the directions of star-streaming and of the galactic centre in terms of the coefficients of harmonic terms observed in the radial and transverse motions of bright stars. The analysis is based on the assumption of a galactic expansion in addition to galactic rotation, the distribution of stellar velocities being ellipsoidal and independent of time. Using numerical values of the coefficients collected by K. Ogrodnikoff [Z. Astrophys. **4**, 190 (1932); this Zbl. **4**, 190] and adopting $\psi = 20^\circ$, the author determines the angular velocity of galactic rotation which in the average is equal to 0,0253 and corresponds to a velocity of 283 km. per sec. at 11000 parsecs of galactic distance. *Kyrill Ogrodnikoff (Poulkovo).*

Lindblad, Bertil: Star-streaming and spiral motion in the stellar system. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **95**, 663—671 (1935).

On the basis of theoretical results of earlier papers [Ark. Mat. Astron. Fys. **19 A**, No. 35 (1926) and K. Svenska Vetenskapsakad. Handl. **4**, No. 7 (1927)] the author has advanced the hypothesis that the big Taurus and Ursa Major streams follow asymptotic spiral orbits diverging from dense inner parts of the galaxy [Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **95**, 12 (1934); this Zbl. **10**, 280]. The author suggests that these orbits are produced by the presence of a discontinuity in the density distribution in the region about 2 kiloparsecs away from Sun in the direction of Sagittarius. In this paper the above hypothesis is applied to the explanation of some known phenomena related to star-streaming which were not as yet satisfactorily accounted for by the theory of galactic rotation, e.g. the observed deviation of the vertex-line from the direction of the galactic centre and the existence of a condensation of stars around the Sun known as the "local system" as well as its elongation in the Cygnus-Carina direction. *Kyrill Ogrodnikoff (Poulkovo).*

Russell, H. N.: The analysis of spectra and its applications in astronomy. Monthly Not. Roy. Astron. Soc. **95**, 610—636 (1935).

Relativitätstheorie.

Weyssenhoff, Jan von: Anschauliches zur Relativitätstheorie. I. Lineare Koordinaten und g_{ik} -Koeffizienten in der speziellen Relativitätstheorie. Z. Physik **95**, 391 bis 408 (1935).

Verf. macht den Versuch, eine vom pädagogischen Standpunkt anschauliche Einführung in die spezielle Relativitätstheorie zu geben. *V. Fock (Leningrad).*

Jehle, Herbert: Eichinvarianz und Lichtgeschwindigkeit. Z. Physik **95**, 243—245 (1935).

Unter Eichinvarianz versteht Verf. — abweichend vom üblichen Sprachgebrauch — Dimensionslosigkeit physikalischer Größen. Der Artikel enthält einige mehr oder weniger bekannte dimensionstheoretische Betrachtungen. *V. Fock (Leningrad).*

Hély, J.: Sur l'interaction électrique et la possibilité d'apprécier expérimentalement les bases électromagnétiques de la relativité. Mém. Artillerie franç. **14**, 415—445 (1935).

Verf. erblickt einen Widerspruch zwischen der Theorie des elektromagnetischen Feldes von Maxwell-Lorentz und der Relativitätstheorie. Die Arbeit ist physikalisch unrichtig. *V. Fock (Leningrad).*

Einstein, A., and N. Rosen: The particle problem in the general theory of relativity. *Physic. Rev.*, II. s. 48, 73—77 (1935).

Im bekannten Schwarzschildschen Ausdruck für das Linienelement wird statt r die neue Variable $u = \pm \sqrt{r - 2m}$ (m Gravitationsradius) eingeführt. Dann haben (für $m > 0$) die $g_{\mu\nu}$ keine reellen Singularitäten mehr. Die Rolle des Repräsentanten der Materie wird vom Verzweigungsschnitt $u = 0$ im Raume der Variablen u, ϑ, φ, t übernommen, dessen beide Hälften $-\infty < u < 0$ und $0 < u < \infty$ einem und demselben physikalischen Raum entsprechen. Auf Grund dieser und ähnlicher Überlegungen wird der Versuch gemacht, eine atomistische Theorie der Materie und der Elektrizität anzudeuten, die nur die $g_{\mu\nu}$ und die elektromagnetischen Potentiale φ_μ benutzt und die Singularitäten ausschließt. Das Mehrkörperproblem, das für die Beurteilung der Möglichkeit einer solchen Theorie entscheidend wäre, wird jedoch nicht behandelt.

V. Fock (Leningrad).

Lanczos, Cornel: Ein neuer Aufbau der Weltgeometrie. *Z. Physik* 96, 76—106 (1935).

This is a further development of the theory published in *Z. Physik* 73, 147 (1931) and 75, 63 (1932) (see this *Zbl.* 3, 177; 4, 88). The author considers a Riemannian world with the line-element $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$, and assumes that the field-equations are derivable from a variational principle, the integrand of the variational integral being an invariant L constructed from the g_{ik} and the contracted curvature-tensor R_{ik} , and quadratic in the latter. The author regards the g_{ik} as corresponding to the coordinates of a dynamical system, the components of R_{ik} as analogous to the velocities, and the derivatives $h_{ik} = \frac{\partial L}{\partial R_{ik}}$ as analogous to the momenta. He then forms the Hamiltonian function. Hamilton's method involves a doubling of the fundamental quantities: in addition to the metrical tensor g_{ik} there is the tensor h_{ik} (canonically conjugate to g_{ik}), which is called the deformation-tensor and is interpreted as an infinitely small deformation of the metrical fundamental field, due to electric actions. Gravitation depends on the metrical tensor, electricity on the deformation-tensor; and physical phenomena are represented by the interaction between the two tensors. The first set of the Hamiltonian canonical equations connects the material tensor of the fundamental field with the mechanical stress-tensor, which resembles the elastic stress-tensor of isotropic bodies, so that the equations express the proportionality of stress to strain, as in the theory of elasticity. The second set of Hamiltonian canonical equations connect the material tensor of the deformation-field with the electromagnetic stress-tensor, and so express the gravitational action of the electromagnetic field. The two sets of canonical equations thus represent the dualism of gravitation and electricity. The theory may in some sense be regarded as a new elastic theory of the aether.

Whittaker (Edinburgh).

Walker, A. G.: On Riemannian spaces with spherical symmetry about a line, and the conditions for isotropy in general relativity. *Quart. J. Math.*, Oxford Ser. 6, 81—93 (1935).

Es wird zunächst gezeigt, wie man die Bedingungen dafür erhält, daß ein Riemannscher V_n Rotationssymmetrie um eine gegebene Geodätische C besitzt. Da diese Bedingungen ziemlich kompliziert sind, werden sie weiterhin abgeschwächt für den Fall „lokaler“ Rotationssymmetrie in der Nachbarschaft von C (definiert durch Vernachlässigung 3. und höherer Potenzen der Abstände von C). Sie ergeben dann eine einfache Darstellung des Riemannstensors durch die Komponenten h_i des Einheitstangentenvektors von C

$$R_{hijk} = (a_0 + 3c_0)(g_{hk}h_ih_j + g_{ij}h_hh_k - g_{hj}h_ih_k - g_{ik}h_hh_j) - 3c_0(g_{hk}g_{ij} - g_{hj}g_{ik}),$$

wo a_0 und c_0 Funktionen der Bogenlänge auf C sind. Verjüngung liefert mit ersichtlichen Abkürzungen

$$R_{ij} = \alpha h_i h_j + \beta g_{ij},$$

womit sofort die Bedeutung des Begriffs der lokalen Rotationssymmetrie klar wird für die relativistische Mechanik von inkohärenten, isotropen Massen, deren Energie-Impuls-Tensor die Form

$$T_{ij} = \rho v_i v_j - p g_{ij}$$

hat. Somit folgen unmittelbare Anwendungen auf dieses Problem, die auch eine bisher weitverbreitete irrtümliche Auffassung des Begriffes „isotroper Druck“ richtigstellen.

Heckmann (Göttingen).

Sen, N. R.: On the stability of cosmological models with nonvanishing pressure. *Z. Astrophys.* **10**, 291—296 (1935).

All non-homogeneous symmetrical models of the universe, obtained by slow and continuous deformation of the homogeneous Friedmann-Lemaître model, have initially greater rates of expansion than the homogeneous model. This minimum property of the Friedmann-Lemaître universe has already been established by the author for very small deformations, and the question of stability has been discussed in the case of vanishing pressure (see this *Zbl.* **10**, 323). In the present paper he gives a proof which is not restricted to the case of small deformations, and concludes that, although the homogeneous model is definitely unstable for vanishing pressure, it is stable for certain deformations and unstable for others when the pressure is not negligible. In this case the stability depends on additional factors which characterize the deformation.

H. S. Ruse (Edinburgh).

Gunn, Ross: Radiation reaction forces and the expanding universe. *J. Franklin Inst.* **220**, 167—186 (1935).

Versuch, eine Reihe von Phänomenen in den Bewegungen der Sterne und extragalaktischen Nebel zurückzuführen auf die Rückstoßwirkung der aus unsymmetrischen Gasmassen austretenden Strahlung.

Heckmann (Göttingen).

Dirac, P. A. M.: The electron wave equation in De-Sitter space. *Ann. of Math.*, II. s. **36**, 657—669 (1935).

Ein Punkt im de Sitterschen Raume wird durch 5 Koordinaten x_ν ($\nu = 1, \dots, 5$) mit $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 + x_5^2 = R^2$ (1) oder $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 = -R^2$ (2) gekennzeichnet. Verf. untersucht die Form der elektromagnetischen Gleichungen und der Wellengleichung für das Elektron im de Sitterschen Raume mit der Signatur (1) und (2), wobei alle Größen (Vektorpotential A_ν , Feld $F_{\mu\nu}$, Wellenfunktion ψ) als Funktionen aller 5 Koordinaten betrachtet werden. A_ν hat 5 durch die Relationen $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0$; $x_\mu A_\mu = 0$ verknüpfte Komponenten und ist in x_ν homogen vom Grade -1 . Das Feld $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$ genügt den Relationen $x_\mu F_{\mu\nu} = 0$. Der Spannungs-Energie-Tensor $G_{\mu\nu} = F_{\mu\lambda} F_{\nu\lambda} - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda}$ genügt den Bewegungsgleichungen $\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = j_\lambda F_{\nu\lambda}$. Die Wellengleichung wird mit Hilfe der Operatoren $m_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu$ und der 5 antikommutierenden Matrizen α_ν in der Form $\{\alpha_\mu \alpha_\nu, m_{\mu\nu} - 2Rm\} \psi = 0$ geschrieben. Der Differentialoperator in dieser Gleichung wird hermitisiert; dabei muß im Falle der Signatur (2) die Konstante m und für (1) die Größe $m + 2i\hbar/R$ reell sein. Ferner werden der Stromdichtevektor $\varrho_\nu = \frac{1}{2R} \varphi (\alpha_\mu \alpha_\nu - \alpha_\nu \alpha_\mu) x_\mu \psi$ und die Integrale $m_{\mu\nu} - \frac{1}{2} i\hbar \alpha_\mu \alpha_\nu$ der Bewegungsgleichungen konstruiert und die Wellengleichung zweiter Ordnung abgeleitet.

V. Fock (Leningrad).

Quantentheorie.

Monod-Herzen, G. E.: Recherches sur les neutrons. *Ann. Physique* **4**, 137 bis 201 (1935).

Weisskopf, Viktor: Probleme der neueren Quantentheorie des Elektrons. *Naturwiss.* **23**, 631—637, 647—653 u. 669—674 (1935).

Temple, G.: The fundamental paradox of the quantum theory. Nature 135, 957 (1935).

Fröhlich, H., E. Guth and G. Temple: The fundamental paradox of the quantum theory. Nature 136, 179—180 (1935).

G. Temple glaubt einen „fundamental defect“ in der modernen Quantentheorie zu erkennen auf Grund folgender Erwägung: Physikalischen Größen a, b, c, \dots , die klassisch definiert sind, seien quantentheoretische Matrixgrößen A, B, C, \dots zugeordnet: $a \rightarrow A, \dots$, in solcher Art, daß $a^2 \rightarrow A^2$; $\lambda a \rightarrow \lambda A$; $a + b \rightarrow A + B$. Dann ist leicht zu zeigen, daß $2ab \rightarrow AB + BA$, und weiterhin, daß diese Zuordnung auf einen Widerspruch führt. Die (seit langem bekannte) Auflösung dieses und ähnlicher Widersprüche ist natürlich die, daß nicht der geringste Anlaß vorliegt, eine derartige eindeutige Zuordnung klassischer und quantentheoretischer Größen für wünschenswert oder überhaupt für sinnvoll zu halten. Im Gegenteil würde eine solche Zuordnung dem Sinn des Korrespondenzprinzips gerade widersprechen: Nicht nur die Operatorgröße Q , sondern alle Operatoren

$$Q + \hbar f_1(Q, P) + \hbar^2 f_2(Q, P) + \hbar^3 \dots$$

mit von \hbar unabhängigen f_1, f_2, \dots gehen im Limes $\hbar \rightarrow 0$ in die klassische Größe q über. Temple faßt zwar schließlich selber als Ergebnis seiner Überlegung die Feststellung auf, daß eben die von ihm angenommene ein-eindeutige Korrespondenz nicht besteht; er spricht jedoch noch am Schluß der Diskussion die — völlig abwegige — Meinung aus, dieses (tatsächlich altbekannte) Ergebnis erfordere „the complete revision of the greater part of the quantum theory“.

P. Jordan (Rostock).

Muto, Toshinosuke: On the diamagnetism of the Dirac's electron. II. Sci. Pap. Inst. Phys. Chem. Res. 27, 109—115 (1935).

In einer vorhergehenden Arbeit (vgl. dies. Zbl. 9, 418) hatte Verf. den Diamagnetismus von gebundenen Elektronen auf Grund der Diracschen Gleichungen für den Fall berechnet, daß $kT \ll$ Dublettaufspaltung ist. Nunmehr betrachtet er auch den Fall: $kT >$ Dublettaufspaltung und erhält sowohl für ein „schwaches“ als auch für ein „starkes“ Feld für die Suszeptibilität:

$$\chi_a = -\frac{e^2 L}{6mc^2} \cdot \frac{1}{2j+1} \{j r^2(j) + (j+1) r^2(-j-1)\}, \quad (1)$$

mit:

$$r^2\left(\begin{smallmatrix} j \\ -j-1 \end{smallmatrix}\right) = \int r^2 \left\{ \frac{|\psi_{\alpha, j}|^2}{|\psi_{\alpha, -j-1}|^2} + \frac{|\psi_{\beta, j}|^2}{|\psi_{\beta, -j-1}|^2} \right\} r^2 dr; \psi_{\alpha, j} \text{ usw.: Lösungen der Diracgl. } (2)$$

Die übrigen Ausdrücke haben die übliche Bedeutung. In $\lim c \rightarrow \infty$ gehen (1) und (2) in die entsprechenden, bekannten nichtrelativistischen Ausdrücke über. Guth.

Serber, Robert: Linear modifications in the Maxwell field equations. Physic. Rev., II. s. 48, 49—54 (1935).

Die aus der Diracschen Theorie der Positronen folgenden Abänderungen in den Maxwellschen Gleichungen können in erster Näherung als eine durch das Feld bedingte zusätzliche Strom- und Ladungsdichte (Polarisation des Vakuums) beschrieben werden. Verf. berechnet diese Zusatzglieder, die die Form eines linearen Integraloperators haben, zunächst für das statische und dann für das zeitlich variable Feld.

V. Fock (Leningrad).

Uehling, E. A.: Polarization effects in the positron theory. Physic. Rev., II. s. 48, 55—63 (1935).

Es wird ein Ausdruck für die induzierte elektrische Ladung (Polarisation des Vakuums) in der Positronentheorie nach der Heisenbergschen Methode für nicht zu starke und nicht zu rasch wechselnde Felder abgeleitet. Als Anwendung wird die Abweichung vom Coulombschen Gesetz berechnet und die aus ihr folgenden Modifikationen der Rutherfordstreuung und der Energieformel für das Wasserstoffatom diskutiert. Diese Effekte sind jedoch klein und liegen nicht in der Richtung der beobachteten Diskrepanzen.

Nordheim (Lafayette-Indiana).

Bear, Richard S., and Henry Eyring: The relation between vector and bond eigenfunction methods for spin degeneracy. *J. chem. Phys.* **3**, 98—106 (1935).

Eine früher entwickelte Methode zur Berechnung von Matrixelementen in Problemen mit Spin-Entartung wird als äquivalent mit der Diracschen Spin-Vektor-Methode erwiesen. Einfache Regeln für die Konstruktion der Matrizen in allen möglichen Fällen werden aufgestellt und einige Anwendungen ausgeführt. *P. Jordan* (Rostock).

Hellmann, H.: Bemerkung zur Polarisierung von Elektronenwellen durch Streuung. *Z. Physik* **96**, 247—250 (1935).

Der Verf. gibt, gestützt auf einfache Symmetriebetrachtungen der entsprechenden Diracschen Gleichungen, einen schönen Beweis für die Unmöglichkeit der Polarisierung von Elektronenwellen an schichtförmigen Potentialinhomogenitäten. In bezug auf den negativen Ausfall der neueren Experimente eine Polarisierung der Elektronenwellen durch Reflexion der Kristalle zu finden, werden Bemerkungen gemacht, wonach dieser Sachverhalt kein Versagen der Diracschen Gleichungen bedeuten muß. *Waller*.

Sandeman, Ian: The mathematical representation of the energy levels of the secondary spectrum of hydrogen. III. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **55**, 72—84 (1935).

Die Messungsergebnisse von Jeppesen über den Grundzustand des Wasserstoffmoleküls werden benutzt, um einen möglichst genauen Ausdruck für die Energiefunktion dieses Zustandes in der Nähe der Gleichgewichtslage zu ermitteln. Für den Grundzustand des Wasserstoffmoleküls kann die durch Näherungsverfahren theoretisch erhaltene Energiefunktion in der Nähe der Gleichgewichtslage durch eine sehr einfache geschlossene Formel dargestellt werden. (II. vgl. dies. Zbl. **12**, 43.)

R. de L. Kronig (Groningen).

● **Manneback, C.:** Calcul et identification des vibrations des molécules. (7. Conf., *Univ. Liège*, 5. XII. 1934.) *Liège: Édit. E. D. K.* 1934. 59 pag. et 17 fig.

Zusammenfassende Übersicht über die Normalschwingungen in Systemen von Massenpunkten für alle wichtigen Fälle von Symmetrie und über die Anwendungen auf die optischen Eigenschaften und die Gestalt von Molekeln. *Hund* (Leipzig).

Bhagavantam, S.: A suggested new interpretation of the structure of band-spectra. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **2**, 92—100 (1935).

Versuch, um auf Grund einer klassisch-mechanischen Vorstellung und mit Hilfe einer Reihe von Annahmen, welche dem Ref. wenig gerechtfertigt erscheinen, vorherzusagen, ob bei Anregung eines zweiatomigen Moleküls der Kernabstand zu- oder abnimmt.

R. de L. Kronig (Groningen).

Eidinoff, Maxwell L., and J. G. Aston: The rotational entropy of nonrigid polyatomic molecules. *J. chem. Phys.* **3**, 379—383 (1935).

Für die Rotation eines starren Gerüsts mit eingebauten Kreiseln wird die Zustandssumme untersucht. In einfachen Fällen führt sie auf eine früher empirisch aufgestellte Formel. Die Ergebnisse werden auf zahlreiche kompliziertere Molekeln angewandt.

F. Hund (Leipzig).

Møller, Chr., and S. Chandrasekhar: Relativistic degeneracy. *Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **95**, 673—676 (1935).

The authors start with the quantum mechanics energy-stress tensor for a single particle

$$T_{\mu\nu} = \frac{c\hbar}{2i} \left(\psi^* \alpha^\nu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x_\mu} \alpha^\nu \psi \right),$$

where $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ are the Dirac matrices, α^4 is i times the unit matrix, and ψ is a solution of the Dirac wave-equation. Using results due to Jordan and Wigner [*Z. Physik* **47**, 631 (1928)], they generalise $T_{\mu\nu}$ to the case of N electrons in a volume V . They then define the pressure as the expectation value of the quantity $(T_{11} + T_{22} + T_{33})/3$, which they evaluate for the case when the N lowest states of the particles are occupied. They obtain the usual expression for the pressure in a relativistically degenerate gas. The validity of this result has been questioned by Eddington [*Monthly Not. Roy. Astron. Soc.* **95**, 194 (1935); this Zbl. **11**, 182]. The object of the present paper is to

give a derivation of the quantum mechanics result by methods comparable with those which Eddington uses in a new discussion to be published later.

W. H. McCrea (London).

● **Debye, P.: Idées modernes sur les supraconducteurs.** (8. Conf., Univ. Liège, 11. XII. 1934.) Liège: Édit. E. D. K. 1934. 18 pag. et 11 fig.

Referat über die thermodynamische Behandlung der Supraleitfähigkeit auf Grund der Hypothese des Verschwindens der magnetischen Induktion im supraleitenden Zustand.

Nordheim (Lafayette-Indiana).

Meissner, W.: Der Stand der Forschung über die Supraleitung. Elektrotechn. Z. 56, 1061—1065 (1935).

Hettich, A.: Erschließung der absoluten Röntgen-Intensitäten mit Hilfe anderer physikalischer Daten. Z. Kristallogr. A 91, 154—156 (1935).

Wenn statt der für die Röntgenanalyse der Elektronendichte in einem Kristall notwendigen absoluten Intensitäten nur relative bestimmbar sind, so kann man die fehlende Größe aus Daten berechnen, die den einzelnen Atomen zukommen, also bei genügenden Vorarbeiten bekannt sind.

F. Hund (Leipzig).

Blochinzew, D.: Zur Theorie der Lichtabsorption in heteropolaren Kristallen. Physik. Z. Sowjetunion 7, 639—651 (1935).

Bei der Absorption eines Lichtquants an einem heteropolaren Kristall entsteht nach der Annahme des Verf. ein freies Elektron und ein ebenfalls frei bewegliches „Loch“ in den Elektronenhüllen. Auf Grund dieser Vorstellungen wird eine Theorie der Lichtabsorption in heteropolaren Kristallen entwickelt. Aus der Theorie folgt, daß die Breite der Absorptionsstreifen von der Temperatur fast gar nicht abhängt. Diese Folgerung scheint in den Beobachtungen von R. Pohl und R. Hilsch eine Bestätigung zu finden.

V. Fock (Leningrad).

Blochinzew, D., und Sch. Drabkina: Zur Theorie der Thermionenkonstante für reine Metalle. Physik. Z. Sowjetunion 7, 484—500 (1935).

Es werden die Möglichkeiten für die Abänderung der Laue-Dushmanschen Thermionenkonstanten A untersucht. Gründe dafür liefern 1. eine Temperaturabhängigkeit der Austrittsarbeit, 2. die scheinbare Änderung der Masse der Elektronen im Metallinnern und 3. das Bestehen eines Transmissionskoeffizienten < 1 an der Metalloberfläche, der durch Beugungseffekte im periodischen Gitter dann zustande kommen kann, wenn die Amplituden des periodischen Potentials vergleichbar mit der Breite der erlaubten Zonen sind. (Nach Ansicht des Ref. sind die Effekte 2. und 3. nicht unabhängig und die Behandlung der Verff. hier unvollständig.) Durch Zusammenwirken von 1. bis 3. kann A sowohl nach oben als nach unten verschoben werden. *Nordheim.*

Hirone, Tokutarô: A simple theory on the anomaly of electric resistance of ferromagnetic substances. Sci. Rep. Tôhoku Univ., I. s. 24, 122—127 (1935).

Es wird eine Theorie der Anomalien des elektrischen Widerstandes der Ferromagnetika versucht auf Grund der Annahme, daß in der klassischen Drudeschen Formel für die Leitfähigkeit die freie Weglänge durch die Rotationsbewegung der Molekularmagnete begrenzt wird. Die erhaltene Formel ist in guter Übereinstimmung mit der Erfahrung.

Nordheim (Lafayette-Indiana).

Hill, E. L.: Note on the statistics of electron interaction. Physik. Z. Sowjetunion 7, 447—451 (1935).

Es wird darauf hingewiesen, daß die Wigner-Seitzsche Berechnung der „statistischen Korrelation“ der Elektronenorte in einem Metall auf Grund des Pauliprinzip nicht genügend allgemein ist, da diese Autoren zwischen Elektronen mit parallelem und antiparallelem Spin unterscheiden. Bei einem System mit verschwindendem Gesamtspin wäre richtiger eine einzige Determinante für alle Elektronen zu nehmen und nicht das Produkt von zweien für je eine Spinrichtung allein. *Nordheim.*

Klassische Optik.

Croze, François: Sur les formules générales de la réfraction d'un pineau lumineux.

C. R. Acad. Sci., Paris **200**, 2150—2153 (1935).

Es wird folgende Aufgabe behandelt: Gegeben eine zwei Medien mit den Brechungsindizes n und n' trennende Fläche mit den beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 . Auf diese trifft ein astigmatisches Strahlenbündel so, daß sein mittlerer Strahl mit dem Einfallslot den Winkel i bildet. Die auf diesem mittleren Strahl liegenden Brennpunkte F_1 und F_2 haben vom Treffpunkt I des Strahls mit der brechenden Fläche den Abstand ϱ_1 bzw. ϱ_2 . Die Hauptschnitte der brechenden Fläche bilden mit der Einfallsebene des genannten Strahls die Winkel θ und $\theta + \frac{\pi}{2}$, die Hauptschnitte des einfallenden astigmatischen Strahlenbündels mit dieser Ebene die Winkel α und $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Für das gebrochene Strahlenbündel gelten die entsprechenden Bezeichnungen wie für das einfallende Bündel, versehen mit einem beigesetzten ', also $i', IF'_1 = \varrho'_1$, $IF'_2 = \varrho'_2$, $\alpha', \alpha' + \frac{\pi}{2}$. Ausgehend von der Tatsache, daß die optischen Lichtwege zwischen einer objektseitigen und einer bildseitigen Wellenfläche auf allen Strahlen gleich lang sind, sollen die Sturmschen Formeln für diesen allgemeinsten Fall abgeleitet werden. Die Ableitung dieser Formeln geschieht folgendermaßen: Es wird ein zweiter Lichtstrahl des Strahlenbündels betrachtet, der durch einen Punkt P der durch F_1 gehenden Brennnlinie (und durch F_2) hindurchgeht und die brechende Fläche in einem dem Punkte I benachbarten Punkte J trifft. Dieser Strahl geht bildseitig durch einen Punkt P' der durch F'_1 gehenden Brennnlinie (und durch F'_2). Die durch F_1 (bzw. F'_1) gehende Wellenfläche, die in hinreichender Genauigkeit als Kreisbogen um F_2 (bzw. F'_2) mit dem Krümmungsradius $\varrho_1 - \varrho_2$ (bzw. $\varrho'_1 - \varrho'_2$) angesehen werden kann, trifft dieser Strahl in den Punkten D (bzw. D'). Dann gilt wegen der Konstanz der Lichtwege

$$n(DP + PJ - F_1I) + n'(JP' + P'D' - IF'_1) = 0.$$

Die Koordinaten des Punktes J in einem Koordinatensystem, dessen Nullpunkt mit dem Punkte I , dessen z -Achse mit dem Einfallslot und dessen xz -Ebene mit der Einfallsebene zusammenfällt, seien x, y, z . Drückt man nun die in der angegebenen Gleichung auftretenden Strecken durch die oben angegebenen Krümmungsradien und Winkel und durch die Koordinaten x, y des Punktes J aus und vernachlässigt hier die dritten und höheren Potenzen von x und y , so ergibt sich

$$DP + PJ - F_1I = \sin i \cdot x + \frac{1}{2} \cos i \left(\frac{1}{P} - \frac{\cos i}{a} \right) x^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\cos i}{Q} - \frac{1}{b} \right) y^2 \\ + \cos i \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{c} \right) xy$$


und entsprechend — mit i', a', b', c' — für $D'P' + P'J - F'_1I = -(JP' + P'D' - IF'_1)$. Hier ist

$$\frac{1}{P} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}; \quad \frac{1}{Q} = \frac{\sin^2 \theta}{R_1} + \frac{\cos^2 \theta}{R_2}; \quad \frac{1}{G} = \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \sin \theta \cos \theta; \\ \frac{1}{a} = \frac{\cos^2 \alpha}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varrho_2}; \quad \frac{1}{b} = \frac{\sin^2 \alpha}{\varrho_1} + \frac{\cos^2 \alpha}{\varrho_2}; \quad \frac{1}{c} = \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} \right) \sin \alpha \cos \alpha.$$

Setzt man dies in die obige Gleichung ein, so erhält man nach Nullsetzen der Koeffizienten von x, x^2, y^2, xy — da ja x und y beliebig sind — die Formeln:

$$n \sin i = n' \sin i'; \\ n \cos i \left(\frac{1}{P} - \frac{\cos i}{a} \right) = n' \cos i' \left(\frac{1}{P} - \frac{\cos i'}{a'} \right); \quad n \left(\frac{\cos i}{Q} - \frac{1}{b} \right) = n' \left(\frac{\cos i'}{Q} - \frac{1}{b'} \right); \\ n \cos i \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{c} \right) = n' \cos i' \left(\frac{1}{G} - \frac{1}{c'} \right). \quad \text{Picht (Berlin).}$$

Pisharoty, P. Rama: Laminar diffraction and the Becke phenomenon. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 2, 14—21 (1935).

Der scharfe Rand eines dünnen durchsichtigen Gegenstandes, dessen Brechungsindex sich von dem der Umgebung unterscheidet, erscheint bei direkter Beleuchtung in einem Mikroskop als dunkle Linie, umgeben von unsymmetrischen Beugungsfransen. Die Theorie von Lummer und Reiche sowie die von Sur kann nicht die Unsymmetrie erklären. Sie nimmt an, daß die durchgehende Wellenfront am Rande eine Diskontinuität erfährt. Die geometrisch-optische Erklärung des Beckeschen Phänomens — das Erscheinen der hellen Linie neben dem dunklen Rand — versagt bei Benutzung eines senkrecht zur Lamelle einfallenden parallelen Strahlenbündels, obwohl auch hier die Beckesche Linie auftritt. Der Verf. versucht daher, die Erscheinungen beugungstheoretisch unter der Annahme zu erklären, daß die durch die Lamelle hindurchtretende Wellenfront mit ihrem an der Lamelle vorbeigehenden Teil derart zusammenhängt, daß sie in der Nähe des Randes etwas geneigt ist ( $\frac{w \cdot F}{L}$). Er führt unter dieser Annahme die Berechnung der Intensitätsverteilung durch und gibt für verschiedene Werte der Phasenverzögerung $(n_1 - n_2)t$, wenn t die Dicke der Lamelle bezeichnet, graphische Darstellungen der Intensitätsverteilung. *Picht* (Berlin).

Henriot, Émile: Optique électronique des systèmes centrés. Première approximation de Gauß. Rev. Optique 14, 146—158 (1935).

Glaser, A., und W. Henneberg: Die Potentialverteilung in Schlitzblende und Lochblende. Z. techn. Physik 16, 222—230 (1935).

Die Verf. untersuchen „rechnerisch und experimentell“ „die an sich bekannten Potentialverhältnisse in Schlitzblenden und Lochblenden“. Sie geben zunächst für beide Fälle die bekannten Formeln der Potentialverteilung, die sie für bestimmte charakteristische Punkte, Linien und Flächen (Blendenmitte, Blendenebene, Axialschnitt usw.) spezialisieren. Anschließend diskutieren sie die Gleichungen in Hinblick auf die Singularitäten des Feldverlaufes. Steigt auf beiden Seiten der Blende das Feld — gleichmäßig oder ungleichmäßig — an oder fällt es nach beiden Seiten ab, so existiert auf der Achse ein singulärer Punkt, in dem sich die Potentiallinien bei der Schlitzblende (zweidimensional betrachtet) unter 90° , bei der Lochblende unter $70^\circ 32'$ schneiden. Steigt indessen das Potential nach der einen Seite der Blende, während es nach der anderen abfällt, so existiert eine singuläre Fläche, die zum Teil oder unter bestimmten Umständen auch ganz mit der Blendenebene zusammenfällt. Der nicht mit der Blendenebene zusammenfallende Teil der singulären Fläche ist ein elliptischer Halbzylinder bzw. bei der Lochblende eine Fläche, die durch Rotation einer halben Ellipse um ihre mit der Achse der Lochblende zusammenfallende kleine Achse entsteht. Die Brennpunkte der Schnittellipsen liegen in beiden Fällen im Blendenrand. Anschließend werden für einige Schlitz- und Lochblenden graphische Darstellungen des Feldverlaufes gegeben, und zwar für die Schlitzblende auf Grund von Ausmessungen im elektrolytischen Trog, für die Lochblende auf Grund rechnerischer Ermittlung. *Picht* (Berlin).

Henneberg, W., und A. Recknagel: Der chromatische Fehler bei elektronenoptischen Anordnungen, insbesondere beim Bildwandler. Z. techn. Physik 16, 230—235 (1935).

Von Farnsworth sowie von G. Holst und Mitarbeitern sind Verfahren angegeben und patentiert worden, die es gestatten, ein Lichtbild in ein Elektronenbild umzuwandeln. Das Lichtbild wird auf einer Photokathode aufgefangen; die einzelnen Stellen der Photokathode emittieren in Abhängigkeit von der örtlichen Helligkeit des Lichtbildes mehr oder weniger Elektronen, die nun ein Beschleunigungsfeld bzw. eine elektronenoptische Anordnung (elektrische und magnetische Linsen) durchlaufen und auf einem Leuchtschirm ein dem Lichtbild ähnliches Leuchtbild erzeugen. Da die emittierten Elektronen verschiedene Geschwindigkeiten besitzen und die von jeder

Stelle der Photokathode emittierten Elektronen Bündel endlicher Öffnung darstellen, so entspricht — teils infolge der „chromatischen“ Fehler der elektronenoptischen Abbildungssysteme, teils infolge Fehlens jeglichen „abbildenden“ Systems — jedem Punkt des Lichtbildes ein Zerstreuungsscheibchen des Leuchtbildes. Die Verf. berechnen nun die Größe der Zerstreuungsscheibchen für die verschiedenen vorgeschlagenen Anordnungen. Die abgeleiteten Formeln benutzen sie zur zahlenmäßigen Berechnung der Größe der Zerstreuungsscheibchen und finden I. bei linearem Potentialanstieg zum Schirm ohne Magnetfeld $2 \cdot 10^{-2}$ cm, II. bei linearem Potentialanstieg zum Schirm und homogenem Magnetfeld $5 \cdot 10^{-3}$ cm, III. bei linearem Potentialanstieg zur Linse und kurzer magnetischer Linse $1,7 \cdot 10^{-3}$ cm. Im letzten Fall, bei dem die höchste Bildgüte erzielbar ist, besteht noch die Möglichkeit, die Vergrößerung beliebig zu wählen.

Picht (Berlin).

Schouten, J. F.: Grundlagen einer quantitativen Vierfarbentheorie. I. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 38, 590—603 (1935).

Geophysik, Meteorologie, Geodäsie.

Bungers, Rolf: Zum 2-Schichten-Problem der angewandten Seismik. Z. Geophys. 11, 207—211 (1935).

Jung, Karl: Geoid und Schwere. Z. Vermessgswes. 64, 550—561 (1935).

Mineo, C.: Über die Bestimmung der Form eines Planeten durch Schwerkraftmessungen bei nicht langsamer Achsendrehung. Astron. Nachr. 256, 215—220 (1935).

Es wird die von Stokes und später von Poincaré behandelte Aufgabe gelöst, die Figur einer im Außenraum eines rotierenden Planeten verlaufenden Niveaufläche aus Schwerkraftstörungen unter der Voraussetzung zu bestimmen, daß jene Niveaufläche nur wenig von der Kugelgestalt abweicht und auch die Unterschiede zwischen ihr und der Bezugsfläche sehr klein sind. Wenn $r = a(1 - \alpha\xi)$ und $r^* = r - \alpha\beta\xi^*$ die Gleichungen der Bezugsfläche und der zu bestimmenden Niveaufläche sind, so kommt man auf den von Poincaré behandelten Fall zurück, wenn nicht nur Größen der Ordnung β^2 , sondern auch der Ordnung $\alpha\beta$ vernachlässigt werden. Läßt man diese Einschränkung gelten, berücksichtigt aber im Gegensatz zu Stokes und Poincaré noch die Glieder mit $\beta\omega^2$, womit eine schnelle Achsendrehung zugelassen wird, so reduziert sich die Aufgabe auf die dritte Randwertaufgabe der Potentialtheorie für die Kugel; sie ist, wie gezeigt wird, auch bei nicht langsamer Achsendrehung mit Kugelfunktionen vollständig lösbar.

Hopfner (Wien)

Malkin, N.: Über die Bestimmung der Figur der Erde. Gerlands Beitr. Geophys. 45, 133—147 (1935).

Ausgehend von einem bekannten Theorem von Chasles wird eine Integralgleichung zur Bestimmung des Geoids aus Schwerkraftwerten abgeleitet, die auf eine beliebige Bezugsfläche bezogen sind. Lösungen der Integralgleichung für den Fall, daß die Bezugsfläche eine Kugel, ein Rotations- bzw. dreiachsiges Ellipsoid ist, werden angegeben. Bei Besprechung der Reduktion der beobachteten Schwerkraftwerte auf die Bezugsfläche wird gezeigt, daß das Reduktionsverfahren von Prey, dessen Anwendung eine gute Kenntnis der Dichteverhältnisse in der Erdkruste voraussetzt, formell durch eine Art Freiluftreduktion ersetzbar ist, deren Berechnung leicht ausgeführt werden könnte.

Hopfner (Wien).

Stefanescu, Sabba S.: Sur la mesure des résistivités apparentes par la méthode de la spire circulaire. Beitr. angew. Geophys. 5, 182—192 (1935).

Eine geoelektrische Methode besteht darin, daß durch eine in der ebenen Erdoberfläche ausgebreitete Kreisschleife Strom gesandt und hierdurch ein Magnetfeld erzeugt wird, dessen Vermessung Rückschlüsse auf die Beschaffenheit des Untergrundes gestattet. Bei homogenem Untergrund ist der spezifische Widerstand ρ un-

abhängig vom Radius R der Kreisschleife und leicht aus den Meßdaten zu entnehmen. Bei inhomogenem Untergrund kann man formal genau so vorgehen wie bei homogenem, doch erhält man dann einen von Radius und Lage des Kreises abhängigen Wert ϱ_{ap} , der als „scheinbarer spezifischer Widerstand“ bezeichnet wird. Der Autor berechnet für horizontal geschichteten Untergrund, d. h. für $\varrho_{ap}(z)$ die vertikale Komponente H_{0z} des Magnetfeldes im Zentrum des Kreises, deren Bestimmung in der Praxis genügt. Er geht aus von dem Vektorpotential

$$A_z = 2\pi IR \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda r) J_1(\lambda R) \lambda d\lambda,$$

wobei J_0 und J_1 Besselsche Funktionen erster Art nullter und erster Ordnung sind. Er erhält hieraus

$$H_{0z} = -\frac{4\pi I}{k^2} \cdot \frac{1}{R^2} \{3 + e^{ikR}(k^2 R^2 + 3ikR - 3)\},$$

wobei $k^2 = -4\pi\sigma\omega i$ bedeutet. Seine allgemeinen Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit den speziellen Resultaten anderer Autoren. *J. N. Hummel* (Berlin).

● **Rossi, B.: Rayons cosmiques.** (Actualités scient. et industr. Nr. 248. Exposés de physique atomique expérimentale. Publiés par Maurice de Broglie. IV.) Paris: Hermann & Cie. 1935. 48 pag. et 13 fig. Frs. 12.—

Zusammenfassende Übersicht und Diskussion der Phänomene der Höhenstrahlung unter besonderer Berücksichtigung der Wirkung des erdmagnetischen Feldes und der Resultate aus Koinzidenzbeobachtungen. *Nordheim* (Lafayette-Indiana).

Bruins, E. M.: Zur kosmischen Korpuskularstrahlung im erdmagnetischen Felde. Physica 2, 879—891 (1935).

Exakte Definition und Begründung der für die Ablenkung der Höhenstrahlen wichtigen geomagnetischen Größen, insbesondere des Unterschieds der Breite, definiert aus dem Erddipolfeld und aus der Inklination. (Nur die erstere ist für die Höhenstrahlen verwendbar.) Es wird qualitativ der Einfluß der Abweichung des Ortes des Erddipols vom Erdmittelpunkt und eines hinzukommenden Quadrupoleffekts diskutiert, ebenso die Möglichkeit einer Asymmetrie zwischen nördlicher und südlicher Halbkugel. *Nordheim* (Lafayette-Indiana).

Menon, C. P. S.: The number of particles in the path of a ray of light traversing the earth's atmosphere. J. Indian Math. Soc., N. s. 1, 165—178 (1935).

Der Verf. knüpft an die bekannten Extinktionsformeln (Lambert, Bouguer usw.) an und entwickelt dann aus den Refraktionsgesetzen einen stark angenäherten Ausdruck für die durchstrahlte Luftmasse (er setzt die Höhe der Atmosphäre $= 10^{-3} \times$ Erdradius und verwendet für den Brechungsexponenten die Beziehung $\mu - 1 = c\varrho$). Sowohl für eine isotherme wie für eine adiabatische Atmosphäre ergibt sich in dieser Annäherung

$$F(z) \propto \sec z \left(1 - \frac{1}{C} \sec^2 z\right).$$

Der Ausdruck stimmt bei nicht zu großen z mit den Beobachtungen gut überein.

P. Gruner (Bern).

Linhart, G. A.: Mathematical relation between turbulence and depth of the ocean. Amer. Math. Monthly 42, 224—227 (1935).

Die Beziehung $\log \{(\theta_\infty - \theta)\} = K \log D + \log k$ wird gegeben (ohne Ableitung). Hier ist θ die Temperaturdifferenz zwischen dem Wasser an der Oberfläche und in der Tiefe D , θ_∞ die Differenz zwischen Oberflächen- und Bodentemperatur, K und k sind Konstanten. Temperaturbeobachtungen von 3 Stationen folgen dieser Gleichung bei passender Wahl der Konstanten. θ wird als Maß für die Turbulenz genommen, wodurch obige Gleichung eine Beziehung zwischen Turbulenz und Meerestiefe darstellt. *B. Haurwitz* (Cambridge, Mass.).

Thorade, H.: Vereinfachte Berechnung von Meeresströmungen. Ann. Hydrogr. 63, 315—316 (1935).

Kurze Mitteilung über die wichtigsten Ergebnisse einer Arbeit von W. Werenskjold (Coastal currents, Norske Vid. Akad., Geofys. Publ. X, Nr 13; dies. Zbl. 11, 191), daß die Summierung der Neigungswinkel der Isopyknen in einer Vertikalen zur Berechnung der Stromkomponente quer zum Vertikalschnitt hinreicht, sowie daß aus den Tiefen der einzelnen Isopyknen an einer Station die gesamte Strommasse gefunden werden kann. Da die Neigungswinkel der Isopyknen gebraucht werden, ist die Hinzunahme einer zweiten Station nicht zu umgehen. Immerhin bleibt das Ergebnis höchst bemerkenswert, und es kann seiner Nachprüfung durch Beobachtungen mit Interesse entgegengesehen werden.

Hopfner (Wien).

Thorade, H.: Untersuchung von Strömungen mittels der Kontinuitätsgleichung. Ann. Hydrogr. 63, 316—317 (1935).

Kurze Mitteilung über zwei Arbeiten von Mituyo Okada [Estimation of the steady current usw., Bull. Jap. Soc. Scient. Fish. III, 3, 121—124 (1934); A graphical method of determining ocean currents, ebda. III, 5, 231—234 (1935)], in denen gezeigt wird, wie bei stationären Strömungen aus der Verteilung des Salzgehaltes in einem Meeresteile zusammen mit der Verteilung anderer Größen, etwa des Silikatgehaltes und der Temperatur, die Stromgeschwindigkeit unter Benutzung der Kontinuitätsgleichung bestimmt werden kann.

Hopfner (Wien).

Baur, F., und H. Philipps: Der Wärmehaushalt der Lufthülle der Nordhalbkugel im Januar und Juli und zur Zeit der Äquinoktien und Solstitien. II. Mitt.: Ausstrahlung, Gegenstrahlung und meridionaler Wärmetransport bei normaler Solarkonstante. Gerlands Beitr. Geophys. 45, 82—132 (1935).

Zunächst werden für bestimmte Zeitabschnitte und gewisse geographische Zonen die Ausstrahlung in den Weltenraum und die Gegenstrahlung der Lufthülle errechnet. Unter Verwendung der Schwarzschildschen Differentialgleichungen, durch deren Integration sich der aufwärts und abwärts gerichtete Strahlungsstrom ergibt, werden dann aus der früher errechneten Energieeinnahme, dem Wärmeumsatz und der Ausstrahlung der Wärmetransport und die Wasserdampfbeförderung festgestellt. Außer diesen allgemeinen theoretischen Ableitungen werden unter Benutzung von Näherungsformeln für die Verteilung der Feuchtigkeit und der Bewölkung und unter Hinzuziehung von Temperaturbeobachtungen aus größeren Höhen für bestimmte Zeitpunkte (Januar, Juli, Äquinoktien) Zahlenwerte des Strahlungshaushaltes errechnet (I. vgl. dies. Zbl. 9, 430).

Hänsch (Hannover).

Schive, J.: Zur Begründung des Ausgleichsprinzips. Z. Vermessgswes. 64, 513—523 (1935).

Verf. diskutiert einige Begründungen der Methode der kleinsten Quadrate, die sich auf das Gaußsche Fehlergesetz stützen, und gelangt im wesentlichen zu bekannten Ergebnissen, wie sie z. B. von Andrae (Den Danske Gradmaaling 1, Abschn.: Om den rette begründelse af de mindste Qvadraters Methode. Kopenhagen 1867) geliefert worden sind.

Schmehl (Potsdam).

Galachow, Th.: Die Ausgleichung elementarer Dreiecksgruppen. Z. Vermessgswes. 64, 449—458 (1935).

Verf. behandelt die Ausgleichung einfacher Dreiecksgruppen (geodätisches Viereck, Zentralsystem, Dreiecksketten) nach dem Boltzschens Entwicklungsverfahren. Die für die praktische Rechnung aufgestellten Formelgruppen sind verhältnismäßig einfach, fügen sich leicht ins Formular ein, sind durch Rechenproben gesichert und fordern nur wenig geübte Rechner. Die Formeln sind dadurch ausgezeichnet, daß der Sinuswiderspruch nach beobachteten, nicht ausgeglichenen Winkeln erhalten wird und daher mit den Winkelwidersprüchen unmittelbar die Güte der Beobachtungen charakterisiert.

Schmehl (Potsdam).

Jung, R.: Beitrag zur Frage der Fehlergleichungen für gebrochene Strahlen. Allg. Vermessgs-Nachr. 47, 424—425 (1935).

In den Allg. Vermessgs-Nachr. 1934 hat Kerl (dies. Zbl. 9, 432) unmittelbar gemessene Strahlen und solche, die aus Polygonzügen errechnet werden, zu einer trigonometrischen Punktausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate zusammengefaßt. Diese Ausgleichung ist eine Näherungslösung; die Winkelmessung der Polygongruppe wird durch fingierte direkte Strahlen ersetzt, für die Gewichte bestimmt werden. Verf. gibt an, wie sich die Ausdrücke für die Gewichte und mittleren Fehler ändern, wenn man hierbei den Anschlußwinkeln fingierter Vorwärtsstrahlen nicht den Richtungsfehler, sondern den Winkelfehler zulegt. *Schmehl* (Potsdam).

Kasper, H.: Zur Fehlerfortpflanzung in überbestimmten Quadratketten. Schweiz. Z. Vermessgswes. 33, 209—214 (1935).

Verf. untersucht die Gewichtsverhältnisse in Ketten, deren Anreihungselemente Quadrate mit beiden Diagonalen sind, und zwar: 1. freie Ketten, 2. Ketten mit Basisbedingung, 3. Ketten mit Azimutbedingung, 4. Ketten mit Basis- und Azimutbedingung. Für freie Ketten ergeben sich Fehlerkreise. Die Basisbedingung verkleinert die Fehler in der Kettenlänge, die Azimutbedingung verkleinert den Querfehler. Zahlenmäßig sind die Azimuteinflüsse den Basiseinflüssen gleich, nur die Wirkungsrichtung ist verschieden. Wegen dieser Wechselbeziehung erhält man im vierten Falle wiederum Fehlerkreise, während im zweiten und dritten Falle Fehlerellipsen auftreten, deren große Achsen mit der Querrichtung (2. Fall) bzw. mit der Längsrichtung (3. Fall) der Kette zusammenfallen. Im Vergleich mit Dreiecksketten wird der Genauigkeitsgewinn bei Quadratketten durch den größeren Arbeitsaufwand kompensiert.

Schmehl (Potsdam).

Walek, K.: Einige besondere Punktbestimmungsaufgaben in vektorieller Behandlung. Österr. Z. Vermessgswes. 33, 68—75 (1935).

Die Mareksche Aufgabe, das erweiterte Rückwärtseinschneiden, der Gegenschnitt und die Hansensche Aufgabe werden in ähnlicher Weise gelöst, wie dies in der dies. Zbl. 6, 287 referierten Arbeit bereits für das Rückwärtseinschneiden geschehen ist. Die Koordinaten der unbekannten Punkte ergeben sich aus je zwei linearen Gleichungen. Es wird zunächst die Mareksche Aufgabe gelöst; durch Zusammenfallenlassen teils der 4 gegebenen, teils der 2 gesuchten Punkte werden aus der Marekschen Aufgabe die Lösungen der übrigen in einfacher Weise abgeleitet. *R. Finsterwalder*.

Pàroli, Alfredo: Sul calcolo numerico delle coordinate geodetiche rettangolari. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 68, 411—424 (1935).

Es wird ein numerisches Verfahren angegeben, welches durch besondere Interpolationsformeln die Berechnung der rechtwinkligen geodätischen Koordinaten aus den geographischen Koordinaten vereinfacht. Mit Erläuterung der entsprechenden Einschränkungen sind numerische Tabellen berechnet worden und hinzugefügt, welche die praktische Anwendung des Verfahrens erleichtern, wie an Beispielen — die sich auf die geographischen Koordinaten von Zentral-Italien beziehen — gezeigt wird. Die Annäherung des Verfahrens ist für topographische Arbeiten hinreichend, wo es besonders zweckmäßig wird, wenn die Zahl der zu berechnenden Punkte groß ist.

Bossolasco (Turin).

Schieferdecker: Koordinatenumformung mit der Doppelmaschine Brunsviga. Allg. Vermessgs-Nachr. 47, 425—427 (1935).

Hristow, Wl. K.: Über die Transformation von verschiedenartigen isometrischen Koordinaten von isothermen Kataster-Systemen in allgemeiner gegenseitiger Lage. Z. Vermessgswes. 64, 545—550 (1935).